

SÉRIE A, N° 1403

N° D'ORDRE :

2268

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

AI. PROCA

1^{re} THÈSE. — SUR LA THÉORIE RELATIVISTE DE L'ÉLECTRON DE DIRAC.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le **11** Mai 1933 devant la Commission d'examen

MM. JEAN PERRIN	<i>Président.</i>
L. BRILLOUIN	} <i>Examineurs.</i>
L. DE BROGLIE	

PARIS

MASSON ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN

—
1933

SÉRIE A, N° 1403

N° D'ORDRE :

2268

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Al. PROCA

1^{re} THÈSE. — SUR LA THÉORIE RELATIVISTE DE L'ÉLECTRON DE DIRAC.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le **Mai 1933 devant la Commission d'examen**

MM. JEAN PERRIN	<i>Président.</i>
L. BRILLOUIN	} <i>Examineurs.</i>
L. DE BROGLIE	

PARIS

MASSON ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN

—
1933

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen..... G. MAURAIN, *Professeur*, Physique du globe.

Doyen honoraire.... M. MOLLIARD.

Profess. honoraires.. { H. LE CHATELIER. EMILE PICARD.
H. LEBESGUE. RÉMY PERRIER.
A. FERNBACH. LÉON BRILLOUIN.
A. LEDUC. A. DEREIMS.

E. GOURSAT..... Analyse supérieure et algèbre supér.
P. JANET..... Electrotechnique générale.
F. WALLERANT... Minéralogie.
P. PAINLEVÉ..... Mécanique anal. et mécanique céleste.
M. CAULLERY..... Zoologie (Evolution des êtres organisés)
ÉMILE BOREL..... Calcul des probabilités et phys. mathém.
H. ABRAHAM..... Physique.
M. MOLLIARD..... Physiologie végétale.
E. CARTAN..... Géométrie supérieure.
GABRIEL BERTRAND Chimie biologique.
JEAN PERRIN..... Chimie physique.
L. LAPICQUE..... Physiologie générale.
M^{me} P. CURIE..... Physique générale et radioactivité.
G. URBAIN..... Chimie générale.
L. MARCHIS..... Aviation.
E. VESSIOT..... Théorie des fonct. et théorie des transf.
A. COTTON..... Physique générale.
J. DRACH..... Application de l'analyse à la géométrie.
CHARLES FABRY... Physique.
R. LESPIEAU..... Théories chimiques.
P. PORTIER..... Physiologie comparée.
CHARLES PÉREZ... Zoologie.
E. BLAISE..... Chimie organique.
P.-A. DANGEARD.. Botanique.
LÉON BERTRAND.. Géolog. structurale et géolog. appliquée.
E. RABAUD..... Biologie expérimentale.
G. JULIA..... Calcul différentiel et calcul intégral.
PAUL MONTEL..... Mécanique rationnelle.
V. AUGER..... Chimie appliquée.
P. WINTREBERT.. Anatomie et histologie comparées.
O. DUBOSCQ..... Biologie maritime.
EUGÈNE BLOCH... Physique théorique et phys. céleste.
L. LUTAUD..... Géogr. physique et géol. dynamique.
HENRI VILLAT... Mécanique des fluides et applications.
CH. JACOB..... Géologie.
P. PASCAL..... Chimie minérale.
E. ESCLANGON... Astronomie.
H. BENARD..... Mécanique expérimentale des fluides.
C. MAUGUIN..... Minéralogie.
L. BLARINGHEM.. Botanique.
A. GUILLIERMOND. Botanique (P. C. N.).
A. DENJOY..... Mathématiques générales.
A. DUFOUR..... Physique (P. C. N.).
H. BÉGHIN..... Mécanique physique et expérimentale.
De BROGLIE..... Théories physiques

Professeurs



E. PÉCHARD..... Chimie (Ens. P. C. N.)
A. GUILLET..... Physique.
M. GUICHARD... Chimie minérale.
A. MICHEL-LEVY Pétrographie.
H. MOUTON..... Chimie physique.
L. DUNOYER..... Optique appliquée.
M. JAVILLIER... Chimie biologique.
ROBERT-LEVY... Zoologie.
A. DEBIERNE... Radioactivité.
E. DARMOIS..... Physique.
G. BRUHAT..... Physique.
F. PICARD..... Zool. (Év. êtres org.)
L. JOLEAUD..... Paléontologie.
M. FRECHET.... Calcul des probab.
et phys. math.
M^{me} RAMART-LUCAS Chimie organ.

FOCH..... Méc. exp. des fluides.
PAUTHENIER..... Physique (P. C. N.).
VILLEY..... Méc. phys. et expér.
LABROUSTE..... Physique du Globe.
FREUNDLER..... Chimie (P. C. N.).
PRENANT..... Zoologie.
P. JOB..... Chimie générale.
CHRETIEN..... Optique appliquée.
G. BOHN..... Zoologie (P. C. N.).
R. COMBES..... Sc. Natur. (P. C. N.).
GARNIER..... Méc. Rationnelle.
PERES..... Méc. des fluides.
LAUGIER..... Physiologie générale.
TOUSSAINT..... Techn. aéronautique.
HACKSPILL..... Chimie (P. C. N.).

Secrétaire..... A. PACAUD
Secrétaire honoraire... D. TOMBECK

A MA FEMME

A TOUS CEUX QUI, DE PRÈS OU DE LOIN,
M'ONT AIDÉ A MENER CE TRAVAIL A BONNE FIN

A MESSIEURS L. BRILLOUIN ET L. DE BROGLIE

*En témoignage de reconnaissance
et d'affectueux dévouement.*



Digitized by the Internet Archive
in 2026

SUR LA THÉORIE RELATIVISTE DE L'ÉLECTRON DE DIRAC DANS UN CHAMP NUL

Par AL. PROCA

INTRODUCTION

L'image de l'électron, que nous avait léguée la théorie classique de Lorentz, a subi des modifications considérables. D'une part, l'électron s'est enrichi d'une nouvelle propriété ; certains résultats spectroscopiques nous ont permis d'affirmer qu'il possédait un moment de rotation, propriété ignorée par la théorie classique mais qui aurait pu y prendre place sans inconvénient. D'autre part, les nouveaux développements de la théorie des quanta ont dépouillé l'électron classique de certaines caractéristiques et précisément de celles qui nous permettaient jusqu'à ce jour de nous le représenter par une image claire et intuitive dans l'espace et le temps. Les conséquences du principe d'incertitude de Heisenberg sont telles, qu'à l'heure actuelle il ne nous est plus possible de décrire qualitativement un électron dans l'espace et le temps, comme nous le faisons dans l'ancienne théorie. Cela ne veut pas dire cependant que nous ne sachions pas définir un électron en mécanique quantique. Au contraire, un tel électron est décrit avec toute la précision désirable par l'équation de Dirac, qui lui sert ainsi de définition ; cette manière de le définir n'est certes plus celle de l'ancienne théo-

rie, mais ne laisse rien à désirer du point de vue logique. L'équation de Dirac contient tout ce que nous savons actuellement en mécanique quantique sur l'électron.

Il faut observer que l'origine de cette équation n'est pas uniquement expérimentale, en d'autres termes que cette équation n'a pas été établie, comme tant d'autres, uniquement dans le but de traduire des résultats expérimentaux connus. Elle dérive de la décomposition d'une expression quadratique en facteurs, opération mathématique, suggérée par certains principes généraux, mais n'ayant aucune signification physique déterminée. L'équation fondamentale est donc écrite en dehors de toute préoccupation d'accord avec l'expérience. On vérifie seulement après coup que cette équation confère bien à l'électron toutes les propriétés que nous lui connaissons. Or, l'essentiel est qu'elle lui confère plus de propriétés qu'il ne semble en avoir. Nous sommes en présence de deux électrons : l'électron expérimental et l'électron de Dirac ; le second n'est qu'une image théorique, définie analytiquement et possédant des caractéristiques qui semblent faire défaut au premier.

Deux alternatives sont alors possibles. Ou bien l'équation de Dirac décrit complètement un électron réel et par conséquent celui-ci possède des propriétés qu'on n'a pas encore découvertes ; il serait alors intéressant de les étudier pour voir comment on pourrait les mettre en évidence expérimentalement. Ou bien, au contraire, les nouvelles propriétés que possède l'électron de Dirac n'ont aucune réalité physique et apparaissent artificiellement, à la suite et comme conséquence des opérations mathématiques conduisant à l'équation fondamentale. Alors, il serait encore intéressant de les étudier *pour fixer les limites extrêmes de l'applicabilité de l'équation de Dirac*. D'une façon ou d'une autre, l'étude approfondie des propriétés d'un électron *de Dirac* est du plus haut intérêt : c'est cette étude que nous nous proposons d'amorcer dans le présent travail.

Le problème ainsi posé doit être subdivisé en deux : étude de l'électron libre et étude du mouvement d'un électron dans un champ électromagnétique ou gravitationnel donné. Nous nous bornerons ici à l'analyse de la première partie du problème, c'est-à-dire au cas de l'absence de champ. Cette restriction laisse en dehors de nos préoccupations la question des énergies négatives ; il n'y a pas dans le cas d'un électron libre de passages à de pareils états, et, si ces derniers existent, on peut adopter à leur égard la même attitude qu'en mécanique classique. On sait en effet, que dans le cas de l'absence de champ et seulement dans ce cas ⁽¹⁾, si un état ne comporte initialement que des états propres d'énergie positive, il continuera indéfiniment à jouir de la même propriété. Les difficultés liées à l'existence d'énergies négatives n'apparaissent qu'en présence d'un champ. Il importe cependant, avant d'aborder le problème général, d'étudier le cas plus simple que nous envisageons ici, pour isoler cette question fondamentale de toute autre difficulté parasite.

Le présent travail, qui passe en revue la plupart des résultats connus et en ajoute quelques autres, se divise en trois parties. Dans la première, on essaye de donner à la théorie de Dirac une forme relativiste correcte, qui permette un traitement symétrique de l'équation fondamentale. Le problème général de la théorie des quanta et de la relativité est extrêmement difficile. Pour voir si une solution est possible, et dans l'affirmative, la trouver, on essaye de résoudre d'abord un problème plus simple : on tâche de donner à la théorie de l'électron de Dirac une forme aussi symétrique que possible, dans le sens où ce terme est employé en relativité. On essaye de réaliser donc *mathématiquement* la symétrie relativiste, dans l'espoir qu'une fois cette symétrie formelle obtenue, on

(1) Cf. E. SCHRÖDINGER, *Annales de l'Institut Henri-Poincaré*, II, 1932, p. 278.

pourra apercevoir plus clairement la meilleure voie d'attaque directe du problème.

Dans la seconde partie, on étudie les caractéristiques nouvelles d'un électron de Dirac, en analysant les intégrales premières du mouvement. Enfin, la troisième constitue un essai d'interprétation physique des résultats mathématiques obtenus.

CHAPITRE PREMIER

Théorie relativiste.

1. Equation de Dirac. Rappel des notions fondamentales. —
Un électron de Dirac est décrit par l'équation :

$$\kappa \frac{\partial \psi}{\partial t} + H\psi = 0, \quad (1/1)$$

où $\kappa = h/2\pi i$, h étant la constante de Planck, $i = \sqrt{-1}$ et H l'hamiltonien. Dans le cas de l'absence de champ, cet hamiltonien est :

$$H = c(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 mc); \quad (2/1)$$

c est la vitesse de la lumière, m la masse au repos de l'électron, p_r ($r = 1, 2, 3$) les opérateurs différentiels correspondant aux composantes de la quantité de mouvement $p_r = \kappa \cdot \partial/\partial x_r$. Les α_r sont des opérateurs hermitiques, commutant avec les coordonnées x_r et les moments p_r et satisfaisant en outre aux conditions bien connues :

$$\alpha_s \alpha_s + \alpha_s \alpha_r = 2\delta_{rs}. \quad (3/1)$$

Dans une représentation dans laquelle α_4 est diagonale, ces opérateurs peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, & \alpha_2 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \\ \alpha_3 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, & \alpha_4 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

ψ dépend d'une nouvelle variable indépendante ζ : les α_r opèrent exclusivement sur celle-ci. ζ ne peut prendre que quatre valeurs ; on distingue d'habitude les quatre valeurs correspondantes de ψ par des indices : $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$. La loi suivant laquelle α_r opère sur ψ est la suivante : si $(\alpha_r)^{ik}$ désignent les éléments de matrice de α_r , on a :

$$(\alpha_r \psi)^i = \sum_{k=1}^4 (\alpha_r)^{ik} \psi_k. \quad (4/1)$$

On peut remarquer que α_r opère sur ψ comme si ce dernier était une matrice à une seule colonne d'éléments $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ et le résultat de l'opération est simplement le résultat de la multiplication des deux matrices α_r et ψ .

Dirac a obtenu son équation par « linéarisation », de la manière suivante. En partant de la relation relativiste entre l'énergie W et la quantité de mouvement p_1, p_2, p_3 :

$$\left(\frac{W}{c}\right)^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2 c^2, \quad (5/1)$$

on pourrait en déduire un hamiltonien, en procédant comme dans le cas de l'équation de Schrödinger. Dirac observe que l'équation qu'on en déduirait ne serait pas en accord avec les principes généraux de la mécanique quantique. Pour arriver à une équation linéaire, il suffirait de partir d'une relation *linéaire* entre W/c et p_1, p_2, p_3 . On obtient une pareille relation en décomposant (5/1) en facteurs, en la « linéarisant », processus qui introduit nécessairement les opérateurs α_r , satisfaisant à (3/1).

L'équation ainsi obtenue satisfait aux exigences de la relativité restreinte, comme l'a montré Dirac. Cependant, elle présente une asymétrie caractéristique et peu familière en relativité ; nous allons commencer par l'analyser.

2. Asymétries dans la théorie de l'équation de Dirac. — Toute théorie relativiste présente une symétrie qui fait

défaut — au moins en apparence, — à la théorie de Dirac. Cette symétrie a un double aspect.

D'abord le temps t , — ou, pour être plus précis, la variable $x_4 = ict$, — est traitée de la même façon que les autres coordonnées ; il n'y a aucune distinction formelle entre les quatre coordonnées d'Univers. Les équations s'écrivent sous une forme parfaitement symétrique en introduisant un élément invariant qui est l'intervalle d'Univers ou *le temps propre*.

Or, dans toute la mécanique quantique, et en particulier dans la théorie de Dirac, *le temps joue un rôle privilégié et la notion de temps propre fait défaut*. En effet, tandis que toutes les autres coordonnées sont traitées comme des opérateurs, seul le temps y est regardé comme paramètre. Ensuite, le temps propre classique est, au fond, la longueur d'un certain arc d'une trajectoire d'Univers ; la notion générale de trajectoire perdant toute signification en mécanique quantique, il est impossible de l'utiliser pour définir quoi que ce soit. La dérivation par rapport à un temps propre analogue à celui de la théorie classique, n'a aucun sens et on ne peut plus parler par exemple *d'une vitesse d'univers*, ni écrire les équations fondamentales sous la forme symétrique désirée. La théorie classique impose donc une symétrie que les méthodes de la mécanique quantique ne permettent pas de conserver.

Nous devons donc nous attacher à définir en mécanique quantique, d'abord *un temps propre*, et ensuite *la dérivée d'un opérateur par rapport à ce temps propre*.

Mais la théorie de la relativité restreinte présente une autre symétrie tout aussi fondamentale que la première : la quantité mc , où m est la masse au repos et c la vitesse de la lumière, *est traitée au fond de la même façon que les quantités de mouvement p_r de l'électron*. Or, l'hamiltonien de Dirac (2/1) introduit automatiquement un terme en mc et même, — semble-t-il, — sur un pied d'égalité avec les autres

termes en p_r . On détruit cette symétrie initiale par des considérations ultérieures. Ainsi, tandis qu'on considère les p_r comme des opérateurs, mc est regardé comme un nombre ; à chacun des termes p_r correspond une variable canoniquement conjuguée x_r , tandis que mc n'a pas de canonique conjuguée ; enfin, on a par exemple, comme Breit l'a montré le premier ⁽¹⁾.

$$\alpha_1 = x_1/c, \quad \alpha_2 = x_2/c, \quad \alpha_3 = x_3'/c,$$

tandis que rien de pareil n'existe pour α_4 , coefficient de mc .

Cette fois-ci, c'est la théorie quantique qui indique clairement l'existence d'une symétrie, dont on ne tient pas compte pour des raisons relevant entièrement de la théorie classique.

Malgré leur diversité apparente, ces deux types d'objections sont intimement liés ; ce sont, au fond, deux aspects d'une seule et même question. Pour l'étudier et arriver finalement à restituer à l'équation de Dirac la symétrie relativiste complète qu'elle doit avoir, il nous faudra commencer par examiner le cas de la théorie classique. Le sens physique des modifications qu'on devra entreprendre apparaîtra alors clairement.

3. Le problème de la masse en théorie classique. — La théorie *classique* présente une symétrie qu'on ne met pas suffisamment en évidence aujourd'hui, et cet oubli se répercute fâcheusement dans la théorie de Dirac. Considérons, en effet, un point en mouvement. Nous pouvons parler d'un point géométrique, c'est-à-dire étudier la Cinématique, — ou envisager un point matériel, c'est-à-dire faire de la Dynamique. Le mouvement d'un point *géométrique* peut être

(1) G. BREIT. *Proc. Nat. Ac. Wash.*, 14, 1928, p. 553.

décrit en se donnant les valeurs des coordonnées et de la vitesse, ou, plus symétriquement, les valeurs :

$$x, \quad y, \quad z, \quad ct$$

et des valeurs proportionnelles à :

$$dx, \quad dy, \quad dz, \quad cdt.$$

L'espace-temps suffit pour décrire ce phénomène. Pareillement, le mouvement d'un point *matériel* peut être décrit en donnant les valeurs des deux groupes de variables canoniquement conjuguées :

$$\begin{array}{cccc} x, & y, & z, & ct \\ p_1, & p_2, & p_3, & -H/c \end{array} \quad (1/3)$$

(H énergie, $\mathbf{p}$ quantité de mouvement, c vitesse de la lumière) et l'espace-temps suffit encore dans ce cas. Mais il ne faut pas oublier que le passage de la Cinématique à la Dynamique consiste, en essence, à remplacer un point géométrique par un point matériel, donc à introduire, *dans un espace euclidien*, un élément nouveau, à savoir la matière, ce qui se traduit par l'apparition de la masse dans nos équations. On suppose que cette masse est un simple coefficient, d'ailleurs constant. Mais logiquement, rien ne nous empêche *a priori*, de supposer que la masse ⁽¹⁾ d'un « point » matériel soit *variable*, et même, variable d'une façon complètement indépendante ⁽²⁾. Pour déterminer le mouvement, il faudra alors donner également la valeur de cette *nouvelle*

⁽¹⁾ Par « masse » nous entendons ici, et dans tout ce qui suit, uniquement la masse au repos.

⁽²⁾ Il faut ajouter que, dans ce cas, les équations du mouvement ne sont plus nécessairement les équations classiques, qui supposent essentiellement la constance de la masse au repos ; il faudra les définir à nouveau.

variable indépendante, c'est-à-dire remplacer le tableau (1/3) par :

$x,$	$y,$	$z,$	$ct,$	?	
$p_1,$	$p_2,$	$p_3,$	$-H/c$	mc	(2/3)

En donnant toutes les valeurs possibles aux variables de ce tableau on décrit complètement le mouvement.

Ce tableau appelle quelques remarques. La nouvelle variable que nous introduisons ainsi est-elle du type « coordonnée » ou du type « quantité de mouvement » ? L'expérience nous apprend qu'en général les « masses » se conservent. Elles ont donc une propriété commune avec la quantité de mouvement et cela justifie le choix que nous avons fait : dans le tableau (2/3), nous avons placé la masse, ou plutôt mc dans la catégorie des moments.

En regard de cet mc , sur la première ligne du tableau, nous avons mis un point d'interrogation pour marquer le fait fondamental : *nous ne connaissons pas de variable canoniquement conjuguée à la masse. Si la masse était une variable indépendante* et si la théorie était symétrique, une pareille variable devrait nécessairement exister. L'espace de configuration du mouvement d'un point matériel, ne devrait plus être l'espace-temps ordinaire, mais un espace à cinq dimensions, la cinquième étant précisément la variable canoniquement conjuguée de la masse. Logiquement, cela est parfaitement admissible. En effet, actuellement, le mouvement d'un point géométrique et celui d'un point matériel sont définis dans le même espace euclidien, à quatre dimensions. Le passage Cinématique-Dynamique, c'est-à-dire l'introduction de la matière, *n'y ajoute rien*. Or, dans la conception à laquelle nous nous bornons ici et qui est celle de la relativité restreinte, la matière est quelque chose de nouveau, de nature essentiellement différente de celle d'un espace euclidien. L'introduction de la matière devrait se manifester géométriquement par l'apparition d'une nouvelle

coordonnée, qui marquerait précisément le fait qu'en dehors de l'espace euclidien proprement dit et en dehors du temps, notre phénomène fait intervenir un élément nouveau, *distinct des précédents*, qui est la matière ⁽¹⁾.

En résumé, si l'on veut conserver les principes généraux de la mécanique analytique, l'hypothèse d'une masse au repos variable entraîne comme conséquence l'introduction dans les calculs d'une cinquième coordonnée, canoniquement conjuguée à mc .

Revenons maintenant en arrière pour examiner l'état *actuel* des choses. La masse n'est pas indépendante des autres moments : elle vérifie la relation déjà décrite (5/1). Mais, au moins formellement, cela ne doit pas altérer l'*existence* d'une variable canoniquement conjuguée ; tout au plus peut-on prévoir qu'il ne s'agira plus d'une variable *indépendante*, mais que sa valeur sera fixée d'une façon quelconque par les quatre autres coordonnées. Quelle peut être cette coordonnée conjuguée ? Formellement, la réponse nous est fournie par l'expression relativiste classique de la fonction de Lagrange. On a en effet, avec les notations habituelles, pour cette fonction de Lagrange :

$$L = - mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} + \frac{e}{c} (\mathbf{v} \mathbf{A}) - e\varphi$$

et comme le temps propre est donné par $d\tau = dt \sqrt{1 - \beta^2}$, on a :

$$L = - mc^2 \dot{\tau} + \dots$$

d'où :

$$\frac{\partial L}{\partial (c\dot{\tau})} = - mc.$$

(1) La fusion de ces éléments exigerait l'emploi de la théorie de la relativité *générale*, et le problème se poserait tout autrement ; mais ici, nous devons rester essentiellement sur le terrain de la relativité *restreinte*. C'est cette condition supplémentaire qui impose les raisonnements précédents. Cette remarque est essentielle.

L'analogie de cette formule avec la formule générale qui relie un moment p_r à sa coordonnée canoniquement conjuguée $p_r = \partial L / \partial \dot{q}_r$ nous permet d'affirmer que : *formellement, la coordonnée canoniquement conjuguée de la masse est le temps propre* (à un facteur de dimensions près, égal d'ailleurs à $-c^2$). Si l'on introduit la variable $x_4 = ict$ à la place du temps propre, on voit que x_1 et imc sont canoniquement conjuguées.

Voilà donc une indication fournie par la théorie classique. Nous devons maintenant chercher à employer cette indication en mécanique quantique pour trouver un théorème analogue qui nous permette de donner à la théorie de Dirac une forme symétrique. Nous serons amenés ensuite à définir une « dérivée » par rapport au temps propre. Pour que le sens de cette définition apparaisse clairement, il est encore indispensable d'examiner le problème analogue en mécanique analytique. Nous consacrerons donc le paragraphe suivant à l'étude de cette question.

4. Calcul des dérivées en mécanique analytique classique.

— Considérons un système dynamique défini par les n coordonnées $q_1, q_2, \dots, q_n$ et par les n moments canoniquement conjugués correspondants $p_1, p_2, \dots, p_n$. Le mouvement est défini par l'intermédiaire d'une fonction de Hamilton donnée, $H(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n, t)$ au moyen des équations bien connues :

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r}, \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (1/4)$$

Si l'on prend maintenant une fonction quelconque $\xi(p, q, t)$ des p , des q et du temps, sa dérivée par rapport au temps sera :

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial \xi}{\partial q_r} \frac{\partial H}{\partial p_r} - \frac{\partial \xi}{\partial p_r} \frac{\partial H}{\partial q_r} \right) \quad (2/4)$$

d'où la formule :

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + [\mathbf{H}, \xi], \quad (3/4)$$

$[\mathbf{H}, \xi]$ étant le crochet de Poisson de $\mathbf{H}$ avec ξ . C'est cette formule qu'on transporte sans changement en mécanique quantique. Nous nous proposons de lui donner une autre forme, analogue à celle qui nous sera utile plus tard dans la théorie de Dirac.

La résolution des équations (1/4) nous fournira en fin de compte, les expressions des p_r, q_r en fonction de t , qui joue donc ici un rôle particulier. L'observation essentielle consiste à remarquer que, le processus étant parfaitement symétrique, on peut faire jouer le rôle de t à une coordonnée q quelconque, $q_1 = q$ par exemple, et obtenir de cette façon, par des formules analogues à (3/4), avec la même facilité, la quantité :

$$\frac{d\xi}{dq} = \frac{d\xi}{dq_1}.$$

Les couples de variables conjuguées :

$$\left. \begin{array}{l} q_1, q_2 \dots q_n, t \\ p_1, p_2 \dots p_n, -\mathbf{H} \end{array} \right\} \quad (4/4)$$

qui définissent le mouvement du système sont absolument équivalents et l'on a le théorème bien connu suivant :

Les équations du mouvement du système s'obtiennent à partir de n'importe quel couple (p, q) de variables canoniquement conjuguées, en supposant connue l'expression du moment p en fonction des autres variables (y compris $\mathbf{H}$), et en écrivant les équations hamiltoniennes ordinaires, où q joue le rôle du temps et $-\mathbf{H}$ celui de l'énergie :

$$\frac{d\eta_s}{dq} = \frac{\partial(-p)}{\partial p_s} \quad \frac{dp_s}{dq} = -\frac{\partial(-p)}{\partial q_s}. \quad (5/4)$$

Comme conséquence, si une fonction η des coordonnées et des moments, ne dépend ni de q ni de p , on peut écrire :

$$\frac{d\eta}{dq} = [-p, \eta], \quad (6/4)$$

la sommation impliquée par le crochet de Poisson portant sur toutes les variables dont dépend η , y compris le temps et l'énergie. Si le couple (p, q) choisi est le couple temps-énergie, on a les équations sous la forme même de Hamilton ; sinon, ce sont des équations réductibles à celle-ci. Remarquons enfin, ce qui est évident mais essentiel, que dans toutes ces formules H n'est plus qu'une variable au même titre que les autres : il ne faut pas la remplacer par son expression en fonction des p, q et t .

Cela étant, prenons les équations du mouvement d'un point matériel en relativité. Nous avons vu que $c\tau$ et $-mc$ sont des variables canoniquement conjuguées. Ces équations peuvent donc se mettre sous la forme hamiltonienne, ainsi qu'il est d'ailleurs bien connu, avec $p = -mc$ et $q = c\tau$ et l'on a, comme cas particulier de (6/4) la relation :

$$\frac{1}{c} \frac{d\eta}{d\tau} = [mc, \eta],$$

ou :

$$\frac{d\eta}{d(ict)} = [-imc, \eta]. \quad (7/4)$$

5. Application à la mécanique quantique. Rôle exceptionnel du temps. — Revenons maintenant à la théorie de Dirac et essayons d'écarter les objections qu'on lui fait, en nous aidant des considérations précédentes.

Avant tout, il faut examiner une difficulté qui se présente même à l'approximation newtonienne et qui constitue une grave inconséquence de la théorie, sur laquelle SCHRÖDINGER a insisté récemment avec force ⁽¹⁾. Il s'agit du rôle exception-

(1) E. SCHRÖDINGER. *Annales de l'Institut Henri-Poincaré*, II, 1932, p. 293.

nel que joue le temps dans toute la mécanique quantique.

La connaissance que nous pouvons avoir du temps s'acquiert, en effet, de la même façon que celle de toutes les autres coordonnées : par des mesures effectuées sur des systèmes matériels. Le temps est donc une observable ; or, la mécanique quantique le traite comme paramètre. Ensuite, la théorie de la relativité est une théorie essentiellement symétrique dans laquelle le temps et les coordonnées sont traités mathématiquement *de la même façon*. Or, la mécanique quantique ne satisfait pas du tout à ce programme. Les coordonnées y sont considérées comme des opérateurs, tandis que le temps est regardé comme paramètre. Le temps est exactement mesurable dans tous les cas, les coordonnées ne le sont pas.

Cette objection, l'une des plus graves qu'on puisse faire du point de vue formel à la théorie de Dirac et en général à la mécanique quantique, est évidemment fondée ; mais il faut faire une distinction qui est d'une importance capitale.

Les équations de la mécanique quantique sont des équations entre opérateurs, déduites d'ailleurs par analogie des équations de la mécanique classique. Parmi ces opérateurs figure toujours l'opérateur unité, c'est-à-dire un opérateur qui commute avec tous les opérateurs imaginables et qui a comme valeurs propres l'unité : il intervient même explicitement dans les conditions de commutation. Il n'est donc pas étonnant de constater qu'une des caractéristiques physiques du système considéré soit représentée par un paramètre, c'est-à-dire par un nombre qui commute également avec tous les opérateurs qu'on puisse imaginer. En fait, *on ne doit pas reprocher à la théorie d'introduire un paramètre parmi les opérateurs qu'elle emploie et lui donner une signification physique. On doit constater seulement qu'il est fâcheux que ce soit précisément le temps qui apparaisse comme paramètre*. Si ce rôle était joué par un *temps propre*, ana-

logue au temps propre classique, la théorie serait symétrique et l'objection tomberait.

Or, si l'on se reporte à ce que nous avons dit au paragraphe précédent, on voit que le rôle privilégié du temps résulte au fond d'un *choix initial particulier* de la manière de définir le mouvement du système. Les fondateurs de la mécanique quantique sont partis des équations classiques, prises sous la forme hamiltonienne; en définissant le mouvement par un hamiltonien, ils ont pu écrire pour un opérateur quelconque

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = [H, \xi] \quad \text{ou} \quad x\dot{\xi} = H\xi - \xi H, \quad (1/5)$$

formule identique à la formule classique, mais où t , la variable canoniquement conjuguée de $-H$, doit nécessairement être regardée comme paramètre pour que le premier membre ait un sens.

Mais, d'après le paragraphe précédent, le *choix de la fonction d'énergie H , pour définir le mouvement du système, est arbitraire*; le même mouvement peut être défini d'une façon parfaitement équivalente au moyen d'une fonction p quelconque, représentant l'un des moments exprimé au moyen des autres moments, des coordonnées, de l'énergie et du temps. Dans ce cas, les équations ont encore la forme hamiltonienne et on peut définir par un crochet de Poisson la dérivée d'une fonction quelconque ξ par rapport à la variable q , canoniquement conjuguée de p et qui a remplacé le temps t .

6. **Changement de paramètre.** — Pour arriver donc à une forme satisfaisante de la mécanique quantique en partant de la forme actuelle, nous devons donc *changer de paramètre* et remplacer t par une autre variable, ce qui nous permettra d'une part de regarder le temps comme une observable, et d'autre part, de réaliser une symétrie relativiste qui actuelle-

ment fait défaut. Quel pourrait être ce nouveau paramètre, ou plutôt quel est le couple de variables canoniquement conjuguées remplaçant le temps t dans son rôle de paramètre et l'énergie H dans son rôle de hamiltonien ?

Nous avons vu qu'on pouvait écrire sous forme hamiltonienne les équations *classiques* du mouvement d'un point, en prenant à la place de l'énergie et du temps le couple masse-temps propre, ou plus correctement

$$-mc \quad \text{et} \quad ct. \quad (1/6)$$

Il eut été légitime, si l'on avait voulu construire dès le début une mécanique quantique relativiste, de partir de ce dernier couple de variables conjuguées pour écrire les équations *quantiques* de mouvement. Ce procédé est probablement le seul qui puisse nous conduire à une solution correcte du point de vue relativiste, — si toutefois une pareille solution existe. La difficulté consiste dans le fait que la notion de trajectoire n'ayant plus aucune signification en mécanique quantique, nous ne pouvons plus définir le nouveau paramètre qui correspond au temps propre en nous servant de l'image classique qui l'assimile à la longueur d'une ligne d'univers. Nous devons donc résoudre d'abord formellement le problème et voir ensuite qu'elle autre définition nous serons amenés à proposer pour le *temps propre*.

Quoi qu'il en soit, nous allons prendre le procédé indiqué plus haut comme point de départ, et voir où il nous conduira.

Par conséquent, conformément au procédé employé par Dirac pour écrire au début les équations de la mécanique quantique, nous partirons de l'équation classique (6/4). Nous admettrons donc, par hypothèse, que le mouvement est déterminé au moyen d'un opérateur $S = -imc$, que nous pouvons appeler « hamiltonien relativiste, et d'un paramètre $u = ic\tau$, par les équations quantiques suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{dx_r}{du} \right] &= [S, x_r] & \left[\frac{dp_r}{du} \right] &= [S, p_r] \\ \left[\frac{dt}{du} \right] &= [S, t] & \left[\frac{dH}{du} \right] &= [S, H] \end{aligned} \right\} \quad (2/6)$$

En d'autres termes, l'équation fondamentale du mouvement au sens de Dirac sera donc, ξ étant un opérateur quelconque :

$$x \left[\frac{d\xi}{du} \right] = x \left[\frac{\partial \xi}{\partial u} \right] + S\xi - \xi S. \quad (3/6)$$

Tout ceci est purement formel ; nous devons préciser maintenant la signification de S et u dans cette équation. Ceci fait, nous serons en droit d'interpréter $S\xi - \xi S$ comme une sorte de « dérivée » par rapport au temps propre (au cas où ξ ne dépend pas de τ) et obtenir ainsi un élément essentiel de la symétrisation cherchée.

7. L'hamiltonien relativiste S . — Nous partons de l'idée qu'au fond l'équation de Dirac décrit correctement le mouvement relativiste d'un électron ; la théorie actuelle est relativiste dans le fond, sinon dans la forme. Par conséquent, quelle que soit la nouvelle forme des équations quantiques du mouvement, ce dernier devra être identique à celui auquel conduit l'équation de Dirac. Cela nous permettra de préciser la signification de $S = -imc$ et de $u = ic\tau$.

Commençons par l'« hamiltonien relativiste » S . Classiquement, le nouvel hamiltonien se déduirait en cherchant l'expression du moment correspondant à S en fonction des autres coordonnées et moments, y compris l'énergie H . Autrement dit, étant donnée l'expression de la fonction de Hamilton $\mathcal{H}(\dots S\dots)$, on trouverait S en résolvant l'équation :

$$H = -\mathcal{H}(\dots S\dots).$$

Dans le cas de la mécanique quantique, les calculs sont considérablement simplifiés par le fait que l'hamiltonien de

Dirac est *linéaire* en ses moments ; on peut affirmer que seule cette circonstance nous permet de calculer S sans ambiguïté.

Considérons alors la relation classique entre nombres ordinaires :

$$-\left(\frac{W}{c}\right)^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2 c^2 = 0. \quad (1/7)$$

Passons aux opérateurs en posant :

$$\frac{W}{c} = -\frac{\kappa}{c} \frac{\partial}{\partial t} = -\kappa i \frac{\partial}{\partial x_4}; \quad p_r = \kappa \frac{\partial}{\partial x_r}; \quad (r = 1, 2, 3). \quad (2/7)$$

Pour la symétrie, mc doit être également considéré comme un opérateur dont nous ne préciserons la forme, mais dont nous savons qu'il commute avec (2/7), avec les coordonnées et avec les α_r et dont une des valeurs propres est égale à $m_0 c$, où m_0 est la valeur numérique de la masse de l'électron.

On déduit de (1/7) l'opérateur⁽¹⁾

$$-W/c + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 mc \quad (3/7)$$

et en l'appliquant à une fonction d'onde ψ , on obtient l'équation fondamentale de Dirac :

$$\frac{\kappa}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \kappa \alpha_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \kappa \alpha_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \kappa \alpha_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_3} + \alpha_4 mc \psi = 0. \quad (4/7)$$

Lorsqu'on prend comme paramètre le temps, ou plutôt ct , c'est-à-dire la variable conjuguée de $-W/c$, on groupe les termes dans (4/7) de la façon bien connue :

$$\kappa \frac{\partial \psi}{\partial t} + H \psi = 0 \quad (5/7)$$

(1) On aurait pu prendre également $+W/c + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 mc$; le choix est arbitraire, mais cet arbitraire n'entraîne aucune difficulté.

et H constitue l'hamiltonien ; on pourrait écrire aussi :

$$\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \frac{iH}{c} \psi = 0.$$

Prenons maintenant comme paramètre *la variable conjuguée d'un autre moment* et, en particulier, de imc . L'équation d'onde doit rester la même, et comme elle est linéaire par rapport aux moments, ceci ne signifie rien d'autre qu'un *groupement différent de ses termes*. La résolution, par rapport à imc , de l'équation (2/1) donnant l'hamiltonien conduirait à l'opérateur :

$$-S = [imc] = -\alpha_4 \frac{W}{ic} - i\alpha_4 \alpha_1 p_1 - i\alpha_4 \alpha_2 p_2 - i\alpha_4 \alpha_3 p_3, \quad (6/7)$$

qu'on doit appliquer à une fonction d'onde ψ ; on obtient *la même équation* (4/7), écrite sous la forme :

$$S\psi + imc\psi = 0, \quad (7/7)$$

où :

$$S = -\alpha_4 \alpha \frac{\partial}{\partial x_4} + i\alpha_4 \alpha_1 \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} + i\alpha_4 \alpha_2 \alpha \frac{\partial}{\partial x_2} + i\alpha_4 \alpha_3 \alpha \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad (8/7)$$

(7/7) est ce qu'on appelle aujourd'hui la forme de Weyl de l'équation de Dirac ; elle a été cependant utilisée, dès l'apparition du premier mémoire de Dirac par J. v. NEUMANN ⁽¹⁾ et reprise par un grand nombre d'auteurs et en particulier par SCHRÖDINGER, pour l'étude du cas de la relativité générale.

8. Symétrie relativiste. — Considérons l'hamiltonien S . En théorie classique l'essence de la symétrie relativiste consiste dans le fait qu'une fois qu'on a remplacé le temps par la variable $x_4 = ict$, les quatre variables x_1, x_2, x_3, x_4 doi-

(1) J. v. NEUMANN. *Z. Physik*, 48, 1928, p. 888.

vent être traitées absolument sur le même plan, malgré que l'une d'elle soit imaginaire. L'asymétrie irréductible du temps et de l'espace physique est englobée dans le facteur $i = \sqrt{-1}$; les transformations de Lorentz définissent une rotation dans l'univers comme si les quatre coordonnées étaient réelles. τ étant le temps propre, on a :

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2.$$

Si l'on pose $x_4 = ict$ et simultanément $u = ic\tau$, on aura :

$$du^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2.$$

Lorsqu'on passe à la mécanique quantique relativiste, la même symétrie exige qu'on traite toujours, et en particulier dans (8/7), toutes les quatre variables sur le même plan. Aux considérations de réalité des variables classiques correspondent en mécanique quantique des conditions d'hermiticité ou d'anti-hermiticité pour les opérateurs, et, dans un cas comme dans l'autre, la réalité ou l'hermiticité est rétablie en multipliant simplement par $i = \sqrt{-1}$.

Considérons l'hamiltonien relativiste (8/7). Les variables $x_k y$ entrent d'une manière parfaitement symétrique, ce qui nous permet de les traiter sur le même plan. Les coefficients de $x \frac{\partial}{\partial x_k}$ ($k = 1, 2, 3, 4$) sont tous hermitiques; d'autre part nous devons considérer, dans une théorie symétrique, tous les $x \partial/\partial x_k$ comme équivalents. *L'hamiltonien S doit donc être employé dans les calculs comme s'il était hermitique*, de la même façon qu'en relativité classique nous admettons que Σdx_k^2 est une *somme* de carrés, ou que l'univers (x_1, x_2, x_3, x_4) est euclidien.

En fait, cependant, les trois derniers termes de S (qui correspondent à x_1, x_2, x_3) sont certainement hermitiques tandis que le premier (qui correspond à $x_4 = ict$) pourrait être considéré comme anti-hermitique. S est donc un hamil-

tonien qu'on peut appeler « pseudo-hermitique », tout comme en réalité l'Univers classique est pseudo-euclidien, et pour les mêmes raisons (à savoir le fait que x_4 est purement imaginaire). En relativité classique on ne peut obtenir une symétrie parfaite qu'en introduisant des quantités purement imaginaires ; on paye d'un prix analogue la symétrie relativiste en mécanique quantique, en introduisant, contrairement à ce qui se passe à l'approximation newtonienne, des termes antihermitiques dans l'hamiltonien ⁽¹⁾.

Cela précisé, revenons au raisonnement dont Dirac s'est primitivement servi pour écrire les équations de la mécanique quantique. La transcription des équations classiques lui a permis d'affirmer que l'expression $H\xi - \xi H$ représente, à un facteur près, la variation $d\xi/dt$ d'un opérateur (ne dépendant pas explicitement de t) par rapport au paramètre t , conjugué canonique de $-H$. Si Dirac était parti du couple de variables $(-S, u)$ il aurait pu écrire *symboliquement*.

$$x \left[\frac{d\xi}{du} \right] = S\xi - \xi S, \quad (1/8)$$

le paramètre étant maintenant $u = ic\tau$ et le temps t lui-même étant un opérateur, comme les coordonnées. Le sens à attribuer à cette relation aurait pu être le suivant : l'expression bien définie :

$$S\xi - \xi S$$

constitue un opérateur qui *correspond* (à un facteur près) à la variation de ξ par rapport au temps propre, pris comme paramètre, c'est-à-dire qui constitue *l'équivalent en mécanique quantique des dérivées classiques par rapport au temps propre*, si importantes pour l'établissement d'une théorie symétrique relativiste correcte.

(1) En mécanique quantique, l'hermiticité n'est définie que pour un domaine d'espace et non d'espace-temps ; cette définition devrait donc être étendue pour couvrir le cas qui nous préoccupe.

Le sens de cette relation ne sera précisé que lorsque nous aurons défini le paramètre u par lequel nous voulons remplacer le temps ordinaire t . Nous tenterons de le faire dans le paragraphe suivant.

9. Le « temps propre » en mécanique quantique. — Nous voulons que le paramètre τ « corresponde » au temps propre de la théorie classique. Remarquons que, même en théorie classique nous ne pouvons définir ce temps propre que lorsque nous connaissons déjà la trajectoire d'univers du point considéré. La transposition directe en mécanique quantique n'est donc pas possible.

Nous n'avons qu'un seul moyen d'avoir des renseignements sur cette grandeur : *c'est de revenir au système dans lequel le temps ordinaire est regardé comme paramètre* (et où H est l'hamiltonien) et d'examiner ce que représente u dans ce système ; en d'autres termes nous devons faire un « changement de paramètre » en sens inverse. Dans ce système, u n'est naturellement plus un paramètre, mais un opérateur ; tout ce que nous savons à son sujet c'est qu'il est canoniquement conjugué de l'opérateur *imc* que nous avons rencontré en (3/7) lorsque nous avons linéarisé l'hamiltonien classique.

Considérons alors dans ce cas (c'est-à-dire lorsque t est regardé comme paramètre), un opérateur χ défini comme suit :

- a) il commute avec $x_k, \alpha_k, p_k (k = 1, 2, 3, 4 ; p_4 = Wi/c)$;
- b) sa dérivée par rapport au temps t est donnée par

$$\dot{\chi} = c\alpha_4. \quad (1/9)$$

Il est très vraisemblable qu'un tel opérateur existe, parce que les conditions a) et b) ne sont pas contradictoires ; en particulier $\alpha_4\chi - \chi\alpha_4 = 0$ n'exclut pas $\dot{\chi} = c\alpha_4$.

Or, rappelons-nous que nous avons considéré mc comme un opérateur (§ 7) ; si l'on écrit alors :

$$\dot{\chi} = c\alpha_4 = \frac{H\chi - \chi H}{x},$$

on aura :

$$mc.\chi - \chi.mc = x.1,$$

ce qui montre que χ est canoniquement conjugué à mc ,

ou :

$$imc \quad \text{à} \quad \chi/i. \quad (3/9)$$

Nous pouvons donc prendre $u = \chi/i$,

$$u = ic\tau = -i\chi \quad \text{donc} \quad c\tau = -\chi,$$

de façon qu'on ait :

$$\boxed{\dot{\tau} = -x_4}. \quad (4/9)$$

Il est cependant difficile de dire si cette solution est unique.

Par ce choix, nous sommes donc en possession d'un opérateur u , canoniquement conjugué à imc . La relation fondamentale :

$$imc.u - u.imc = x.1,$$

ne ressemble pas ici aux relations connues, par exemple à :

$$\frac{\partial}{\partial x} . x - x . \frac{\partial}{\partial x} = 1,$$

d'une part, parce que u n'est pas analogue à un x , d'autre part, parce que l'opérateur mc n'est pas un opérateur différentiel de la forme $\partial/\partial\omega$. Il ne semble pas indiqué, — au moins jusqu'à ce qu'on ait une théorie mathématique correcte, — de poser :

$$mc = x \frac{\partial}{\partial\omega},$$

par analogie avec $p_k = x \partial/\partial x_k$, comme on l'a souvent tenté jus-

qu'à présent [cf. en particulier, EDDINGTON, PROCA, TANAKA]. En effet, on a :

$$imc\psi = x\alpha_4 \frac{\partial\psi}{\partial x_4} - \sum_{r=1}^3 x\alpha_4\alpha_r \frac{\partial\psi}{\partial x_r}.$$

Si les coefficients des $\partial\psi/\partial x_r$ étaient des constantes ou des opérateurs commutables, on pourrait imaginer une substitution linéaire changeant les $x_1, \dots$ en d'autres variables $y_1, \dots, \omega$, de la forme :

$$\begin{aligned} x_1 &= -\alpha_4\alpha_1\omega + \dots \\ x_2 &= -\alpha_4\alpha_2\omega + \dots \end{aligned}$$

de façon que :

$$\frac{\partial x_1}{\partial \omega} = -\alpha_4\alpha_1, \dots$$

et on aurait :

$$imc\psi = x \frac{\partial\psi(\omega, \dots)}{\partial \omega},$$

ce qui permettrait d'interpréter mc comme une dérivée. Mais cela n'est plus vrai, car les α_k n'étant pas commutables, le théorème concernant la dérivée d'une fonction de fonction n'est plus applicable. On peut présumer qu'il s'agit, au fond, d'une relation de même nature entre mc et x , et il est très probable qu'on pourra l'exprimer de la manière précédente, dès qu'on aura développé une théorie mathématique correcte de cette dérivation échelonnée. Une telle théorie mathématique manque cependant à l'heure actuelle.

Nous avons réussi donc à choisir un opérateur qui pourra jouer dans une théorie symétrique, le même rôle que joue le temps ordinaire dans la théorie quantique. Avons-nous cependant le droit de dire que cet opérateur correspond au temps propre classique, c'est-à-dire pouvons-nous affirmer que c'est sur cet opérateur qu'on serait tombé, si l'on avait voulu dès le début prendre le temps propre comme paramètre ?

Le fait que u est le canonique conjugué de imc , qui correspond à la masse, est un argument en faveur d'une réponse affirmative. On peut en fournir un autre en cher-

chant *directement* quel est l'opérateur qui correspond au temps propre t classique.

10. Relations de Breit. — On y arrive en cherchant précisément une interprétation de l'opérateur α_4 . On sait que, d'après la relation générale $\dot{x}_\xi^2 = H\xi - \xi H$, on a les formules de Breit :

$$\dot{x}_1 = c\alpha_1, \quad \dot{x}_2 = c\alpha_2, \quad \dot{x}_3 = c\alpha_3. \quad (1/10)$$

Les opérateurs $c\alpha_1$, $c\alpha_2$, $c\alpha_3$ sont donc les opérateurs de la vitesse tridimensionnelle de l'électron. Mais que représente alors l'opérateur $c\alpha_4$?

Pour trouver une correspondance acceptable, on a raisonné comme suit. Ecrivons la relation classique donnant l'énergie, $W = mc^2/\sqrt{1 - \beta^2}$, sous la forme d'une relation entre cette énergie, les quantités de mouvement $p_r = m\dot{x}_r/\sqrt{1 - \beta^2}$ ($r = 1, 2, 3$), et la vitesse $\dot{x}_r$. On a :

$$W = \dot{x}_1 p_1 + \dot{x}_2 p_2 + \dot{x}_3 p_3 + mc^2\sqrt{1 - \beta^2}. \quad (2/10)$$

En comparant cette expression à (2/1) on peut dire que si $c\alpha_r$ correspond à la vitesse classique $\dot{x}_r$, α_4 correspondra à $\sqrt{1 - \beta^2}$. C'est ce qu'admettent entre autres Breit, qui a le premier écrit les relations (1/10) et Schrödinger. Mais les relations (1/10) découlent rigoureusement d'une formule quantique, tandis que la correspondance :

$$\alpha_4 \rightarrow \sqrt{1 - \beta^2},$$

résulte d'une simple analogie. Aussi Fock ne l'admet-il pas.

Cependant, il est clair à notre avis qu'on fait fausse route lorsqu'on veut trouver la signification de α_4 au moyen d'analogies de cette sorte. Ce procédé réussit pour les $\dot{x}_r = c\alpha_r$, parce qu'il s'agit d'éléments qui entrent *linéairement* dans les formules ; il est très vraisemblable qu'il échouera quand

on l'appliquera à un radical tel que $\sqrt{1 - \beta^2}$. Nous devons donc chercher dans une autre direction.

Or, prenons pour un instant la conception de Breit $\alpha_4 \rightarrow \sqrt{1 - \beta^2}$ et remarquons que $\sqrt{1 - \beta^2} = \frac{d\tau}{dt}$, τ étant le temps propre classique. α_4 correspondrait à $\dot{\tau}$. Or, on a classiquement :

$$c^2 dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 - c^2 d\tau^2 = 0, \quad (3/10)$$

relation tout à fait analogue à la relation :

$$(W/c)^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - m^2 c^2 = 0. \quad (4/10)$$

Cherchons donc, à partir de (3/10), *l'opérateur* qui correspond au temps propre τ , *par le même procédé que nous avons utilisé pour déduire l'hamiltonien à partir de (4/10)*.

Pour ce dernier, nous avons procédé en deux étapes. Nous avons d'abord décomposé (4/10) en deux facteurs :

$$(W/c + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 mc) \\ (-W/c + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 mc) = 0, \quad (5/10)$$

et, nous avons choisi le second, — arbitrairement d'ailleurs, qui nous a fourni :

$$H'/c = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 mc.$$

Nous sommes passé ensuite aux opérateurs en remplaçant les p_r et mc , par les opérateurs (2/7) et nous avons obtenu au second membre l'hamiltonien H . (au facteur c près).

Pour trouver l'opérateur qui correspond à τ , partons de même de (3/10), décomposons en facteurs :

$$(cdt + \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 + \alpha_3 dx_3 + \alpha_4 cd\tau) \\ (-cdt + \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 + \alpha_3 dx_3 + \alpha_4 cd\tau), \quad (6/10)$$

et choisissons cette fois-ci, le premier facteur, c'est-à-dire écrivons :

$$\left. \begin{aligned} - cdt &= \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 + \alpha_3 dx_3 + \alpha_4 c d\tau', \\ \text{soit encore :} \\ - \frac{dx_4}{i} &= \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 + \alpha_3 dx_3 + \alpha_4 \frac{du'}{i}. \end{aligned} \right\} (7/10)$$

Dans ces relations dx_1, dx_2, dx_3 et dt sont des nombres ordinaires donc $d\tau$ et du des matrices à 4 lignes et 4 colonnes. Nous pouvons écrire :

$$\frac{du'}{dx_4} = \frac{d\tau'}{dt} = - \left(\alpha_4 + i\alpha_4\alpha_1 \frac{dx_1}{dt} + i\alpha_4\alpha_2 \frac{dx_2}{dt} + i\alpha_4\alpha_3 \frac{dx_3}{dt} \right). \quad (8/10)$$

Ceci constitue la première étape du passage de la relation classique (3/10) à la relation correspondante entre opérateurs. Pour achever ce passage, il faut maintenant substituer aux nombres ordinaires x_r , les opérateurs x_r correspondants (le temps restant d'ailleurs un *nombre ordinaire*, un paramètre, puisque nous sommes en mécanique quantique newtonienne). Simultanément, τ sera remplacé par l'opérateur non-accentué qui lui correspond et nous serons alors en droit d'affirmer que le second membre de (8/10) représente l'opérateur qui correspond à la dérivée *du temps propre de la mécanique classique*.

Or, ce premier membre renferme les $\dot{x}_r = dx_r/dt$ qui ont, lorsqu'on passe aux opérateurs, une signification précise : on a $\dot{x}_r = c\alpha_r$. Mais ces opérateurs ne commutent pas avec leurs coefficients respectifs ; nous ne pouvons donc pas affirmer, sans plus, que (8/10) soit valable, si tous les x_r et τ y représentent des opérateurs. Pour passer de (8/10) à l'expression quantique correcte, il faut procéder comme on procède lorsqu'on part d'une fonction classique

qui n'est pas « bien ordonnée », c'est-à-dire la symétriser : prendre par exemple $(pq + qp)/2$ au lieu de pq . L'expression quantique correcte, correspondant au second membre de la relation classique (ou plutôt semi-classique) (8/10), sera donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (-2\alpha_4 - \sum_1^3 i\alpha_4 \alpha_r \frac{dx_r}{dt} - \sum_1^3 \frac{dx_r}{dt} \cdot i\alpha_4 \alpha_r) \\ = \frac{1}{2} [-2\alpha_4 - c \sum (\alpha_4 \alpha_r \cdot \alpha_r + \alpha_r \cdot \alpha_4 \alpha_r)] = -\alpha_4, \end{aligned}$$

et l'on aura :

$$\boxed{\frac{da}{dx_4} = \frac{d\tau}{dt} = -\alpha_4}, \quad (9/10)$$

cette fois-ci τ étant un *opérateur*, qui correspond au temps propre classique.

Comparons (9/10) et (4/9) ; les deux conditions de définition sont identiques. Nous pouvons donc affirmer que l'opérateur a que nous avons choisi au paragraphe précédent et qui était canoniquement conjugué à imc , correspond bien au temps propre classique, c. q. f. d.

Vérifions la cohérence de ces déductions. Lorsque nous sommes passés de la relation classique (3/10) à (7/10) nous avons toute latitude de choisir les différentielles qui devaient rester des nombres ordinaires et celle qui devenait une matrice. Nous avons convenu que $d\tau'$ ou du' était une matrice et que dt restait un paramètre ; mais nous aurions parfaitement pu admettre que $d\tau$ devait garder le caractère de paramètre et que, par exemple, dt' était une matrice. Au lieu de (8/10) nous pouvons écrire maintenant :

$$\frac{dt'}{d\tau} = -\frac{1}{c} \left(\sum_1^3 \alpha_r \frac{dx_r}{d\tau} + c\alpha_4 \right),$$

ou :

$$\frac{dt'}{du} = -\frac{1}{c} \left(\frac{\alpha_i}{i} + \sum_1^3 \alpha_r \frac{dx_r}{du} \right), \quad (10/10)$$

(u, x_1, x_2, x_3 nombres ordinaires, t' matrice à quatre lignes et quatre colonnes). *Passons aux opérateurs*, u restant un paramètre. Les « dérivées » correspondant aux dx_r/du seront données par la formule générale (1/8). On a facilement :

$$\left[\frac{dx_r}{du} \right] = i\alpha_4 \alpha_r \quad (r = 1, 2, 3) \quad (11/10)$$

et ici aussi, ces opérateurs ne commutent pas avec leurs coefficients. Le même raisonnement que plus haut nous donne, pour le second membre, l'opérateur $-\alpha_4/ic$. Ceci doit être égal à $\left[\frac{dt}{du} \right]$ calculé au moyen de la formule générale ; et en effet on vérifie directement, d'après (1/8) avec la valeur (8/7) de S , que :

$$\left[\frac{dt}{du} \right] = -\frac{\alpha_4}{ic} \quad \text{ou} \quad \left[\frac{dt}{d\tau} \right] = \left[\frac{dx_i}{du} \right] = -\alpha_4$$

qui est bien le résultat primitif ⁽¹⁾.

11. Etats, et moyennes observables. Difficultés du problème.

Nous avons montré dans les paragraphes précédents comment on pouvait définir formellement en mécanique quanti-

⁽¹⁾ Remarquons que, pour arriver à une définition correcte du temps propre, nous avons dû prendre le premier *facteur* dans la décomposition des *coordonnées* (6/10) alors que nous avions pris le *second* dans la décomposition des moments (5/10). *A priori*, rien n'indique qu'il faille prendre le même facteur dans les deux décompositions ; au contraire, il est naturel de procéder d'une manière différente suivant qu'il s'agit de coordonnées ou de moments canoniquement conjugués. Au surplus, le produit de ces facteurs commence par un terme de la forme correcte $p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3 - Wdt + \dots$, qu'on n'obtiendrait pas en choisissant le second facteur dans les deux décompositions ; au fond, il s'agit ici d'une question de covariance et de contre-variance sur laquelle nous n'insisterons pas.

que un « temps propre ». En mécanique classique, cette définition exige la connaissance du mouvement du système ; en mécanique quantique, ce genre de définition fait défaut et on doit passer par l'intermédiaire des opérateurs. La définition de la variation d'un opérateur ξ quelconque avec le temps propre u permet, au moins formellement, de développer une théorie dans laquelle u serait regardé comme paramètre et qui par conséquent serait relativiste non seulement dans le fond, mais même dans sa forme. Mais ceci n'est qu'un aspect de la question, celui qui correspond au *calcul des opérateurs* ; pour résoudre complètement le problème il faudrait pouvoir énoncer des théorèmes concernant les états du système, c'est-à-dire, employer le calcul des valeurs et des fonctions propres. Or, c'est là que gît la difficulté.

Elle se manifeste d'abord par le fait que dans la théorie ordinaire la fonction d'onde $\psi(x, y, z, t)$ dépend directement du paramètre choisi c'est-à-dire de t , tandis qu'il n'en est pas de même si l'on prend comme paramètre le « temps propre » τ que nous venons de définir.

Assurément, nous pouvons encore dire que ψ dépend du paramètre τ , mais la manière dont on doit mettre en concordance les diverses valeurs de x, y, z, t et celles de τ , autrement dit la forme des fonctions x, y, z, t de τ , n'est pas connue. De toute façon, pour avoir x, y, z, t , en fonction de τ il faut trouver quel est le mouvement ; mais tandis qu'en mécanique classique nous savons que x, y, z, t , sont des fonctions continues ayant une forme unique et bien déterminée de τ (qui représente la longueur d'un arc de courbe), en mécanique quantique nous ne pouvons plus rien dire, ni sur la continuité, ni même sur la constance de la forme de ces fonctions, lorsque τ varie. On a cependant l'impression que ces difficultés sont d'ordre purement mathématique et ne touchent pas le fond physique de la question. Elles tiennent au fait que nous voulons décrire la manière dont une fonction ψ dépend d'une variable τ , que nous ne pouvons définir

qu'après avoir résolu un problème de mécanique quantique. Il n'est pas impossible d'imaginer qu'en perfectionnant les méthodes de calcul, on puisse atteindre la solution de ce problème purement mathématique, mais cela ne suffirait pas pour éclairer le côté physique du problème envisagé.

En tout cas, parallèlement au calcul des opérateurs, on devrait développer le calcul des fonctions d'ondes, et le premier problème à résoudre serait de trouver les valeurs et les fonctions propres de l'hamiltonien relativiste S , de façon à pouvoir développer une fonction quelconque ψ en série suivant ces fonctions fondamentales. Il est relativement simple d'en trouver l'expression, mais il est difficile de préciser le domaine dans lequel on doit les définir.

L'important dans le cas qui nous préoccupe est de trouver un procédé qui nous permette de passer d'un opérateur η à une quantité mesurable, qui puisse l'interpréter physiquement. Or l'intégrale :

$$\bar{\eta}(t) = \int \psi^* \eta \psi . dx dy dz, \quad (1/11)$$

représente effectivement, en mécanique newtonienne, la moyenne des mesures de la grandeur physique correspondant à η , faites à un instant t bien déterminé ; elle varie avec t . Cette intégrale est prise pour un volume d'espace, qui n'a pas de signification invariante en relativité ; donc la moyenne (1/11) est inutilisable. Pour qu'elle ait un sens, il faudrait par exemple, prendre l'intégrale de la densité $\psi^* \eta \psi$ sur un volume d'espace-temps. Mais alors le résultat serait indépendant de t et nous ne pourrions plus suivre l'évolution du phénomène, but que nous nous étions assigné. Telle est brièvement résumée, la difficulté principale qu'on rencontre dans ce problème.

On peut faire à ce sujet les remarques suivantes (en nous bornant au cas où η représente un opérateur formé par un produit des α_r , cas le plus intéressant en relativité).

1° Les densités de moyenne $\psi^* \eta \psi$ présentent les caractères tensoriels requis par une théorie relativiste correcte ; elles se sont avérées indispensables pour l'interprétation des faits, donc elles jouent certainement un rôle dans l'interprétation physique. La difficulté commence lorsqu'on veut passer aux moyennes et intégrer ces densités dans l'espace.

2° D'après le raisonnement communément admis, les moyennes $(1/11)$ étant inacceptables, il faut les remplacer par des moyennes dans l'espace-temps et ceci détruit leur signification. Mais il se peut que *ce raisonnement-ci* soit erroné. Il se peut que la solution consiste non pas à abandonner la moyenne $(1/11)$ dans une théorie relativiste symétrique, mais à la garder et à la compléter par d'autres grandeurs ⁽¹⁾. Lorsque η est un opérateur formé par des produits de α_r , on pourrait garder $(1/11)$ et interpréter $\psi^* \eta \psi . dx dy dz$ comme la valeur de la probabilité d'une grandeur, lorsqu'on sait qu'une autre grandeur t , dont l'opérateur commute avec η , a une valeur bien déterminée. Autrement dit, $(1/11)$, donnerait une *probabilité relative*, la mesure simultanée de η et de t étant possible, par hypothèse.

Mais, en même temps on peut dire que, par raison de symétrie, cette information est insuffisante ; on peut considérer aussi trois autres probabilités :

$$\left. \begin{array}{l} \psi^* \eta \psi . dy dz dt, \quad \psi^* \eta \psi . dz dx dt, \quad \psi^* \eta \psi . dx dy dt \\ \text{et :} \quad \psi^* \eta \psi . dx dy dz dt, \end{array} \right\} \quad (2/11)$$

toujours dans l'hypothèse que η commute avec les coordonnées et le temps ⁽²⁾. Le sens physique de ces quantités n'est

⁽¹⁾ Considérons en mécanique newtonienne, *uniquement* la composante p_1 de la quantité de mouvement de long de Ox . Il est clair que lorsqu'on passe à la mécanique relativiste, cette grandeur n'a aucune signification ; seul, l'ensemble des quatre composantes formant l'impulsion d'univers, en a une.

⁽²⁾ Certaines de ces densités peuvent être purement imaginaires, pour satisfaire aux conditions de réalité requises. Voir le paragraphe 25.

pas très clair ; $\int \psi^* \eta \psi . dy dz dt$ donne, par exemple, une grandeur prise pendant toute l'évolution du système, mais seulement lorsque la coordonnée x a une valeur déterminée.

La vraie difficulté qu'on rencontre lorsqu'on introduit les quantités (2/11) pour compléter, du point de vue relativiste, les informations que nous possédons sur le mouvement du système, consiste dans le fait que lorsqu'on passe aux moyennes en intégrant (2/11), on ne sait rien *a priori* sur les nouveaux *domaines d'intégration* ; une analyse de cette difficulté est indispensable avant de pouvoir chercher le sens physique de ces expressions.

Ce qui précède nous indique seulement une voie suggérée par des considérations de symétrie mathématique. Physiquement, c'est tout le problème de la mesure d'une grandeur qui est en jeu. Il est probable qu'à ce point de vue, les difficultés qu'on a rencontrées (et qui se sont manifestées, en particulier, dans le flottement qu'il y a eu au début dans l'établissement des relations d'incertitudes correctes), ont comme origine le fait suivant : en micro-mécanique le phénomène à mesurer est essentiellement influencé par l'appareil de mesure lui-même, *qui intervient d'une façon non négligeable* ; pour calculer le résultat d'une mesure, il faut donc résoudre un *problème relativiste de deux corps*, problème qui n'est pas encore résolu, même en théorie classique.

Quoi qu'il en soit, ce qui nous intéresse en particulier dans une théorie relativiste ce sont les densités $\psi^* \eta \psi$, et celles-ci peuvent être définies sans aucune ambiguïté.

12. Densités de moyennes. — L'absence de renseignements plus précis sur l'opérateur mc et sur la manière dont finalement x_1, x_2, x_3, t , dépendent du temps propre, nous empêchent d'appliquer ici le raisonnement qui nous permettait, en mécanique quantique, de donner un sens à l'opérateur

« dérivée par rapport au *temps* » $\frac{d\eta}{dt}$, et trouver ainsi une signification de la « dérivée » par rapport au *temps propre* $\left[\frac{d\eta}{d\tau}\right]$. Nous pouvons cependant donner une interprétation très précise de la *densité de moyenne* de $\left[\frac{d\eta}{d\tau}\right]$ de la façon suivante ⁽¹⁾ :

On a par définition : $\kappa \left[\frac{d\eta}{du}\right] = S\eta - \eta S$ (nous supposons que η ne dépend pas explicitement ni de τ , ni du temps ordinaire t , pour simplifier). De plus :

$$S = i\alpha_4 \left[\frac{\kappa}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{H}{c} - \alpha_4 mc \right] = \frac{i\alpha_4}{c} \left(\kappa \frac{\partial}{\partial t} + H \right) - imc,$$

H étant l'hamiltonien. Donc, en appliquant à une fonction d'onde ψ :

$$\kappa \left[\frac{\partial \eta}{\partial u} \right] \psi = S\eta\psi - \eta S\psi = (S + imc)\eta\psi = \frac{i\alpha_4}{c} \left(\kappa \frac{\partial}{\partial t} + H \right) \eta\psi.$$

D'autre part :

$$0 = \eta \left(\kappa \frac{\partial}{\partial t} + H \right) \psi,$$

d'où :

$$-i c \alpha_4 \cdot \kappa \left[\frac{d\eta}{du} \right] \psi = (H\eta - \eta H)\psi = \kappa \frac{d\eta}{dt} \psi,$$

donc :

$$\left[\frac{d\eta}{du} \right] \psi = \frac{i}{c} \alpha_4 \cdot \frac{d\eta}{dt} \psi \quad \text{ou :} \quad \left[\frac{d\eta}{d\tau} \right] \psi = -\alpha_4 \frac{d\eta}{dt} \psi \quad (1/12)$$

et par conséquent :

$$\psi^* \left[\frac{d\eta}{du} \right] \psi = \frac{i}{c} \psi^* \alpha_4 \frac{d\eta}{dt} \psi,$$

⁽¹⁾ Cette interprétation a été donnée également par T. TANAKA, *Z. Physik*, 69, 1931, p. 810, dans l'hypothèse que mc est un opérateur de la forme $\kappa \cdot \partial/\partial\omega$; ce qui suit montre que cette hypothèse n'est pas essentielle.

soit encore :

$$\psi^* \left(\frac{d\tau}{dt} \right) \psi + \psi^* \left(\alpha_4 \left[\frac{d\eta}{d\tau} \right] \right) \psi = 0. \quad (2/12)$$

Ces relations permettent d'interpréter les moyennes des dérivées par rapport au temps propre, en utilisant les moyennes des dérivées par rapport au temps ordinaire, et fournissent ainsi une expression mathématique de l'opération du « changement de paramètre » que nous avons étudiée.

Il est un cas particulier, très important, dans lequel nous pouvons aller beaucoup plus loin et donner l'expression de la « dérivée » $\left[\frac{d\eta}{du} \right]$ en fonction de $\frac{d\eta}{dt}$. C'est le cas où η est un opérateur commutant avec mc et W/c et en même temps, *commutant avec* α_4 . Certains opérateurs formés par les produits des α_k sont dans ce cas. On a alors par un raisonnement analogue, si η commute avec α_4 .

$$\left[\frac{d\eta}{du} \right] = \frac{i\alpha_4}{c} \frac{d\eta}{dt}, \quad (3/12)$$

relation écrite maintenant entre opérateurs et non plus entre densité de moyennes. On peut donner une formule pour le cas où η anticommute avec α_4 , mais elle est moins simple.

CHAPITRE II

Intégrales premières.

13. Dérivées des opérateurs α . — L'électron de Dirac diffère d'un électron ordinaire, d'abord par la forme linéaire de son hamiltonien, ensuite par l'apparition des opérateurs α_k . Il y a quatre opérateurs nouveaux α_k , qui apparaissent dans l'hamiltonien. Si on calculait une autre grandeur attachée à l'électron on rencontrerait encore ces quatre α_k et aussi, éventuellement, leurs produits. Or, on sait qu'avec les quatre α_k on ne peut former par multiplication que seize opérateurs linéairement indépendants, à cause des relations fondamentales (3/1). Chacun de ces seize opérateurs décrit d'une façon ou d'une autre une caractéristique de l'électron : par exemple, les $c\alpha_r$ représentent la vitesse $\dot{x}_r$, $x\alpha_2\alpha_3/2$ une composante du moment cinétique, etc. Les relations qui décrivent des propriétés nouvelles de l'électron de Dirac comportent nécessairement un certain nombre de ces seize opérateurs. Pour une étude complète de ces propriétés nouvelles, il faudra donc analyser d'abord le comportement de ces opérateurs, sans en négliger aucun.

Commençons donc par calculer leur variation par rapport au temps et par rapport au temps propre. Nous avons dressé le tableau de la page 39. La première colonne contient l'opérateur A envisagé ; la seconde $HA - AH = x \frac{dA}{dt}$; la troisième $SA - AS = x \left[\frac{dA}{du} \right]$; la quatrième et la cinquième,

respectivement, les anticommutateurs $AH + HA$ et $AS + SA$.

Rappelons qu'on a :

$$H = c \sum_1^3 \alpha_r p_r + \alpha_4 mc^2 = K + \alpha_4 mc^2$$

$$S = \sum_1^3 i \alpha_4 \alpha_r p_r + \frac{W}{ic} \alpha_4,$$

avec :

$$p_k = \hbar \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, 3, 4), \quad p_4 = -\frac{W}{ic}, \quad \frac{W}{c} = -\hbar \frac{\partial}{\partial t}.$$

H ne contient pas explicitement le temps t , et S ne contient pas explicitement u ; $dH/dt = 0$, $[dS/du] = 0$, H est une constante et S une constante d'univers. Dans le tableau suivant nous désignerons *ces constantes* par les mêmes lettres H et S .

14. Intégrales premières. Moments cinétiques. — Un opérateur ξ sera appelé une « intégrale première proprement dite », lorsque $d\xi/dt = 0$. Nous dirons de même que nous avons affaire à une « intégrale première d'univers », si $[d\xi/du] = 0$.

L'analogie avec la mécanique classique nous suggère immédiatement quelques types d'intégrales premières proprement dites, par exemple ceux des intégrales correspondant à la constance de la quantité du mouvement ou du moment cinétique. Mais l'électron de Dirac possède des propriétés différentes de celles d'un électron classique; cette différence se manifestera non seulement dans la forme des intégrales, qui sera différente de la forme classique, mais aussi dans l'existence d'autres intégrales premières simples, distinctes des précédentes.

Nous allons former systématiquement ces intégrales, qui peuvent, en gros, se partager en deux groupes, correspon-

TABLEAU I

Opérateur A	$x \frac{dA}{dt} = HA - AH$	$x \left[\frac{dA}{du} \right] = SA - AS$	HA + AH	AS + SA
x_1	$2(Hx_1 - cp_1)$	$-2\left(\alpha_1 p_1 + \frac{W}{c}\right) i\alpha_1 \alpha_1$	$2cp_1$	$-2i\alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 \alpha_4 \alpha_1$
x_2	$2(Hx_2 - cp_2)$	$-2\left(\alpha_2 p_2 + \frac{W}{c}\right) i\alpha_1 \alpha_3$	$2cp_2$	$-2i(\alpha_3 p_3 + \alpha_1 p_1) \alpha_4 \alpha_2$
x_3	$2(Hx_3 - cp_3)$	$-2\left(\alpha_3 p_3 + \frac{W}{c}\right) i\alpha_4 \alpha_3$	$2cp_3$	$-2i(\alpha_1 p_1 + \alpha_3 p_3) \alpha_4 \alpha_3$
α_4	$2(Hx_4 - mc^2) = 2c(\Sigma \alpha_i p_i) \alpha_4$	$-2i(\Sigma \alpha_i p_i) = 2\left(Sx_4 - \frac{W}{ic}\right)$	$2mc^2$	$-\frac{W}{c}$
$\alpha_2 \alpha_3$	$2c(\alpha_3 p_2 - \alpha_2 p_3)$	$2i\alpha_4(\alpha_3 p_2 - \alpha_2 p_3)$	$2c(\alpha_1 p_1 + mc\alpha_4) \alpha_2 \alpha_3$	$-2i\left(\alpha_1 p_1 + \frac{W}{c}\right) \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$
$\alpha_3 \alpha_1$	$2c(\alpha_1 p_3 - \alpha_3 p_1)$	$2i\alpha_4(\alpha_1 p_3 - \alpha_3 p_1)$	$2c(\alpha_2 p_2 + mc\alpha_4) \alpha_3 \alpha_1$	$-2i\left(\alpha_2 p_2 + \frac{W}{c}\right) \alpha_3 \alpha_4 \alpha_1$
$x_1 x_2$	$2c(\alpha_2 p_1 - \alpha_1 p_2)$	$2i\alpha_4(\alpha_2 p_1 - \alpha_1 p_2)$	$2c(\alpha_3 p_3 + mc\alpha_4) \alpha_1 \alpha_2$	$-2i\left(\alpha_3 p_3 + \frac{W}{c}\right) \alpha_4 \alpha_1 \alpha_2$
$\alpha_1 \alpha_1$	$-2c(\alpha_1 p_1 - \alpha_1 mc)$	$2(S\alpha_1 \alpha_1 + ip_1)$	$2c(\alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3) \alpha_4 \alpha_1$	$-2ip_1$
$\alpha_1 \alpha_2$	$-2c(\alpha_1 p_2 - \alpha_2 mc)$	$2(S\alpha_1 \alpha_2 + ip_2)$	$2c(\alpha_3 p_3 + \alpha_1 p_1) \alpha_4 \alpha_2$	$-2ip_2$
$\alpha_1 \alpha_3$	$-2c(\alpha_1 p_3 - \alpha_3 mc)$	$2(S\alpha_1 \alpha_3 + ip_3)$	$2c(\alpha_4 p_4 + \alpha_2 p_2) \alpha_1 \alpha_3$	$-2ip_3$
$\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$	$2cp_1 \alpha_1 \alpha_3 \alpha_4$	$-2ip_1 \alpha_1 \alpha_3 \alpha_4$	$2c(\alpha_1 p_1 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 mc) \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$	$2(S \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 + ip_1 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$
$x_3 \alpha_1 \alpha_1$	$-2cp_2 \alpha_1 \alpha_3 \alpha_4$	$+2ip_2 \alpha_1 \alpha_3 \alpha_4$	$2c(\alpha_3 p_3 + \alpha_1 p_1 + \alpha_4 mc) \alpha_3 \alpha_4 \alpha_1$	$2(S \alpha_3 \alpha_4 \alpha_1 - ip_2 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$
$\alpha_1 \alpha_1 \alpha_2$	$-2cp_3 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$	$-2ip_3 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$	$2c(\alpha_4 p_4 + \alpha_2 p_2 + \alpha_4 mc) \alpha_4 \alpha_1 \alpha_2$	$2(S \alpha_4 \alpha_1 \alpha_2 + ip_3 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$
$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$	$2H \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$	$\frac{W}{c} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$	0	$2i(\Sigma \alpha_i p_i) \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = \frac{iW}{c}$
$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$	$-2mc^2 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$	$2S \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$	$2c(\alpha_2 \alpha_3 p_1 + \alpha_3 \alpha_1 p_2 + \alpha_1 \alpha_2 p_3)$	$= 2(S \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 - \frac{W}{c} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$ 0

dant, l'un aux moments cinétiques classiques, l'autre aux quantités de mouvement.

Ainsi qu'il est bien connu, l'énergie et la quantité de mouvement d'un électron de Dirac sont constantes en l'absence de champ. Les plus simples intégrales premières sont donc :

$$p_r = \text{const.} \quad H = \text{const.}, \quad (1/14)$$

intégrales banales que nous retrouverons d'ailleurs plus loin. Mais le type d'intégrale première réellement utile dans ce problème est celui utilisé par Dirac dès le début et qui donne le spin de l'électron. On peut les écrire sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} x_2 p_3 - x_3 p_2 + \frac{\kappa}{2} \alpha_2 \alpha_3 &= \text{const.} \\ x_3 p_1 - x_1 p_3 + \frac{\kappa}{2} \alpha_3 \alpha_1 &= \text{const.} \\ x_1 p_2 - x_2 p_1 + \frac{\kappa}{2} \alpha_1 \alpha_2 &= \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (2/14)$$

et elles expriment la conservation du moment cinétique *total*, y compris le moment de rotation propre de l'électron. Leur vérification est aisée au moyen du tableau 1; on peut les écrire :

$$x_2 p_3 - x_3 p_2 + \frac{\kappa}{2i} \sigma_1 = \text{const.}$$

$$\dots \dots \dots$$

en posant :

$$\sigma_1 = i\alpha_2\alpha_3, \quad \sigma_2 = i\alpha_3\alpha_1, \quad \sigma_3 = i\alpha_1\alpha_2. \quad (3/14)$$

La théorie présente la symétrie relativiste. Ecrivons alors en regard les coordonnées et les moments de la façon suivante :

$$\left. \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 = ict & c\tau \\ p_1 & p_2 & p_3 & \frac{iH}{c} & -mc \end{array} \right\} \quad (4/14)$$

Les grandeurs placées sur une même ligne jouent des rôles absolument analogues. En formant de toutes les manières possibles des composantes « de moment cinétique » c'est-à-dire analogues à $x_2 p_3 - x_3 p_2$, nous arriverons à des intégrales analogues à (2/14). En effet, en utilisant le tableau I, on démontre facilement les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} x_1 \frac{H}{c} - c p_1 \cdot t + \frac{x}{2} \alpha_1 &= \text{const.} \\ x_2 \frac{H}{c} - c p_2 \cdot t + \frac{x}{2} \alpha_2 &= \text{const.} \\ x_3 \frac{H}{c} - c p_3 \cdot t + \frac{x}{2} \alpha_3 &= \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (5/14)$$

Ces équations forment le pendant de (2/14) et définissent des « composantes de temps » du tenseur moment cinétique de l'électron. Elles fournissent aussi immédiatement les valeurs des coordonnées et donnent la décomposition de Schrödinger. Par un calcul facile, on a :

$$x_r = \text{const.} + c^2 p_r H^{-1} \cdot t + \frac{c x}{2} H^{-1} \alpha_r. \quad (6/14)$$

A la vitesse constante, à laquelle on pourrait s'attendre en l'absence de champ, se superpose donc, dans le cas de l'électron de Dirac, une autre vitesse supplémentaire, qui est oscillante, ainsi que nous le verrons plus loin.

En regard des coordonnées et moments nous avons inscrit dans le schéma (4/14) les variables conjuguées $c\tau$ et $-mc$. En appliquant le même mécanisme formel que précédemment, on trouve de nouvelles intégrales premières. Posons pour abréger l'écriture :

$$v_r = i \alpha_4 \alpha_r, \quad v_4 = -\alpha_4 \quad (r = 1, 2, 3) \quad (7/14)$$

qu'on peut écrire :

$$v_k = \left[\frac{dx_k}{du} \right] = x'_k. \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Nous désignerons dorénavant par des accents les dérivées prises par rapport à u , et par un point celles par rapport à t . Avec ces notations on vérifie facilement que :

$$\left. \begin{aligned} x_1.mc + p_1.c\tau + \frac{x_i}{2} v_1 &= \text{const.} \\ x_2.mc + p_2.c\tau + \frac{x_i}{2} v_2 &= \text{const.} \\ x_3.mc + p_3.c\tau + \frac{x_i}{2} v_3 &= \text{const.,} \end{aligned} \right\} \quad (8/14)$$

qui donne la décomposition analogue à celle de Schrödinger pour les coordonnées, mais en fonction du temps propre. La combinaison avec la colonne du temps fournit :

$$mc^2t + H\tau + \frac{x}{2} \alpha_4 = \text{const.}, \quad (9/14)$$

qui donne la décomposition du temps propre en fonction du temps ordinaire.

Remarquons qu'en utilisant le même procédé, nous aurions pu trouver les « intégrales premières d'univers » suivantes :

$$\left. \begin{aligned} x_1S - p_1u + \frac{x}{2} v_1 &= k_1 = \text{const. d'univers} \\ x_2S - p_2u + \frac{x}{2} v_2 &= k_2 = \text{»} \\ x_3S - p_3u + \frac{x}{2} v_3 &= k_3 = \text{»} \\ x_4S - p_4u + \frac{x}{2} v_4 &= k_4 = \text{»} \end{aligned} \right\} \quad (10/14)$$

une constante d'univers k étant définie par la relation $[dk/du] = 0$.

On peut ainsi noter :

$$x_r \left(-\frac{W}{ic} \right) - x_4 p_r + \frac{x_i}{2} \alpha_r = \text{const. d'univers}, \quad (11/14)$$

relations qui nous seront utiles plus tard.

Des égalités qui précèdent, on peut déduire d'autres intégrales premières particulièrement intéressantes. On a, par exemple, en partant de (2/14) :

$$\Sigma i\alpha_2' p_1 = \Sigma \sigma_1 p_1 = \text{const.} : \quad (12/14)$$

la projection du moment cinétique sur la direction de la quantité de mouvement est une constante ; nous retrouverons cette intégrale plus loin, par une autre voie. On a aussi :

$$\sum_1^3 p_r \dot{x}_r - Ht - umc = \text{const.}, \quad (13/14)$$

qui donne « l'action », et se déduit en intégrant directement l'expression de H. Enfin remarquons qu'on a, en vertu de (5/14) :

$$\dot{x}_r \frac{H}{c} - cp_r + \frac{\alpha}{2} - \alpha_r = 0$$

ou d'une façon générale :

$$\boxed{p_r = \dot{x}_r \frac{H}{c^2} + \frac{\alpha}{2c^2} \ddot{x}_r} \quad (r = 1, 2, 3), \quad (14/14)$$

formule qui donne la quantité de mouvement en fonction de la vitesse, et qui est d'une importance capitale. La différence entre l'électron de Dirac et l'électron classique consiste précisément en cette séparation des deux notions : quantité de mouvement et vitesse ; Fock a particulièrement insisté là-dessus. On voit ici en quoi consiste cette séparation. En mécanique classique, avec un coefficient α réel, une pareille relation signifierait un mouvement avec *dissipation d'énergie*. Ici cependant α est complexe et l'énergie totale reste constante. On doit rapprocher cela des observations de SCHRÖDINGER, relatives aux équations de diffusion à coefficient imaginaire.

Notons encore la forme des relations (14/14), lorsqu'on

considère les dérivées par rapport au temps propre, et qui nous seront utiles par la suite :

$$p_k = x'_k S + \frac{x}{2} x''_k = S x'_k - \frac{x}{2} x''_k \quad (15/14)$$

d'où :

$$x''_k = \frac{2}{x} (p_k - v_k S) = \frac{2}{x} (S v_k - p_k). \quad (16/14)$$

15. Intégrales premières. Quantités de mouvement. — Une autre série d'intégrales premières, à laquelle appartiennent les composantes de la quantité de mouvement, s'obtient en remarquant que le carré de l'hamiltonien :

$$H^2 = c^2 \Sigma p_r^2 + m^2 c^4, \quad (1/15)$$

commute avec tous les produits α . On a alors le théorème suivant, qu'on démontre facilement (voir plus loin) :

L'anticommutateur, de tout opérateur ξ qui commute avec H^2 , est une intégrale première ; en particulier, les anticommutateurs de tous les produits α fournissent chacun une intégrale première.

La colonne $HA + AH$ du tableau I nous donne donc directement des intégrales premières ⁽¹⁾, dont toutes ne sont d'ailleurs pas distinctes de celles précédemment obtenues. On y voit figurer d'abord la quantité de mouvement et la masse, anticommutateurs des α_r :

$$\left. \begin{aligned} H\alpha_r + \alpha_r H &= 2cp_r = \text{const.} \\ H\alpha_4 + \alpha_4 H &= 2mc^2 = \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (2/15)$$

Les produits de deux α_k , fournissent des intégrales du type :

$$(i\alpha_1\alpha_2\alpha_3)p_1 + mc \cdot (i\alpha_2\alpha_3\alpha_4) = \text{const.}, \quad (3/15)$$

⁽¹⁾ Qui sont hermitiques si A l'est, et qu'il suffit de multiplier par $i = \sqrt{-1}$, pour les rendre hermitiques, si A est lui-même antihermitique.

ou du type :

$$(i\alpha_3\alpha_4\alpha_1)p_3 + (i\alpha_4\alpha_1\alpha_2)p_2 = \text{const.}, \quad (4/15)$$

intégrales premières *distinctes* de celles obtenues au paragraphe précédent. Les produits de trois α_k fournissent des intégrales du type :

$$(i\alpha_2\alpha_3\alpha_4)H + icp_1(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4) = \text{const.} \quad (5/15)$$

qui s'écrit aussi :

$$(\alpha_2p_2 + \alpha_3p_3 + \alpha_4mc)i\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \text{const.} \quad (6/15)$$

et, — pour $\xi = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$, — l'intégrale première :

$$(\alpha_1p_1 + \alpha_2p_2 + \alpha_3p_3)i\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \text{const.} \quad (7/15)$$

qu'on peut écrire :

$$\Sigma\sigma_1p_1 = \text{const.}, \quad (8/15)$$

forme sous laquelle nous l'avons déjà décrite au paragraphe précédent.

Remarquons, qu'à part les quatre premières qui sont banales, les 10 intégrales restantes peuvent s'écrire sous une forme symétrique. Il suffit de former le tableau suivant, analogue à (4/14) :

$$\left. \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & p_3 & \frac{iH}{c} \\ i\alpha_2\alpha_3\alpha_4 & -i\alpha_3\alpha_4\alpha_1 & i\alpha_4\alpha_1\alpha_2 & \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \end{array} \right| \begin{array}{c} -mc \\ i\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \end{array} \right\}$$

et d'égaliser à une constante les déterminants du second ordre qu'on peut y former (en mettant les éléments de la seconde ligne à gauche lorsqu'ils ne commutent pas avec ceux de la première).

Ces intégrales sont particulièrement intéressantes parce qu'elles existent *même en présence d'un champ*, si l'on introduit ce champ à la façon ordinaire, par l'intermédiaire des

potentiels. En effet, quel que soit ce champ, l'opérateur ξ formé par le produit d'un certain nombre de α_k , commutera avec H^2 ; son anticommutateur fournira alors une intégrale première.

Ces intégrales font intervenir les produits de la forme $\alpha_r \alpha_s \alpha_t$ ($r \neq s \neq t$), ainsi que $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$. Jusqu'à présent, on a accordé très peu d'attention à ces opérateurs; on préférerait décrire l'ensemble des 16 sédénions de base au moyen de deux systèmes de quaternions, à la manière de Dirac ou de Fock. Cependant les opérateurs α_r, α_s présentent des avantages marqués de simplicité; ils ont les dérivées les plus simples de tout l'ensemble, et comme nous venons de le voir, ils fournissent des intégrales intéressantes.

Les opérateurs du type α_k ou $\alpha_r \alpha_s$, envisagés au paragraphe précédent décrivent le nouveau degré de liberté de l'électron correspondant au spin; les quatre opérateurs

$$i\alpha_2\alpha_3\alpha_4, \quad -i\alpha_3\alpha_4\alpha_1, \quad i\alpha_1\alpha_4\alpha_2, \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4,$$

peuvent être utilisés pour décrire ce que Fock appelle le « second degré de liberté interne » de l'électron. Les unités quaternionniennes décrivent ce second degré de liberté comme une rotation dans un espace abstrait, essentiellement distinct de l'espace ordinaire. Nous verrons que, même si l'on reste strictement dans le domaine de la mécanique, les nouveaux opérateurs peuvent s'interpréter par une image beaucoup plus intuitive.

16. Opérateurs ternaires. — Pour simplifier les notations, posons :

$$\theta = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4, \quad \omega = i\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \quad (1/16)$$

$$\begin{aligned} R_1 &= i\alpha_3\alpha_4\alpha_1, & R_2 &= -i\alpha_3\alpha_4\alpha_1, \\ R_3 &= i\alpha_4\alpha_1\alpha_2, & R_4 &= -i\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\omega. \end{aligned} \quad (2/16)$$

On a :

$$R_k = i\alpha_k\theta = -\alpha_k\alpha_4\omega \quad (k = 1, 2, 3, 4). \quad (3/16)$$

La relation $R_k = i\alpha_k\theta$ a une conséquence importante, que nous mentionnerons avant toutes choses. Considérons en effet une particule définie par un hamiltonien hermitique

$$H' = iH\theta. \text{ Si } H = c \sum_{r=1}^3 \alpha_r p_r + \alpha_4 mc^2, \text{ on aura :}$$

$$H' = c \Sigma R_r p_r + R_4 mc^2.$$

Or, on a, à cause de (3/16), $R_k^2 = 1$, $R_r R_s + R_s R_r = 0$; donc, cette seconde particule peut être considérée également comme un électron de Dirac. Les R_k jouent donc, pour le second électron, le même rôle que les α_k pour le premier. Si l'on établit une interprétation pour les α_k d'un électron de Dirac, elle vaudra également pour l'« électron image » défini par l'hamiltonien $H' = iH\theta$; par exemple, la vitesse de ce dernier sera $\dot{x}_r = cR_r$, et ainsi de suite. La symétrie est complète. Soit ψ_n une fonction propre de l'opérateur H , correspondant à l'énergie E_n , $H\psi = E_n\psi$; $\theta\psi_n$ sera alors la fonction propre correspondant à l'énergie égale mais négative $-E_n$. (Si ψ représente un état de l'électron, $\theta\psi$ ne représente pas un état du même électron, puisqu'elle ne satisfait pas à l'équation d'onde; $\theta\psi$ décrit un état de l'électron image, c'est-à-dire identique au précédent à cela près que toutes les valeurs de l'énergie, — aussi bien les positives que les négatives, — ont changé de signe).

L'opérateur θ est en quelque sorte le pendant de l'opérateur $\mathbf{1}$. Tandis que $\mathbf{1}$ commute avec tous les α_k , θ *anti-commute* avec eux; remarquons aussi qu'il anticommute avec R_k . Les 16 opérateurs α peuvent se séparer en deux groupes de 8, le premier contenant outre l'unité les quatre α_k et les trois composantes du spin :

$$\mathbf{1}, \quad \mathbf{1}, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \alpha_4, \quad \alpha_2\alpha_3, \quad \alpha_3\alpha_1, \quad \alpha_1\alpha_2.$$

Ce premier groupe contient tous les opérateurs sur lesquels s'est porté exclusivement l'attention de la plupart des cher-

cheurs jusqu'à présent. Rangeons dans le deuxième groupe le reste :

$$2. \quad \theta, \quad \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4, \quad - \alpha_3 \alpha_4 \alpha_1, \quad \alpha_4 \alpha_1 \alpha_2, \quad \alpha_4 \alpha_1, \quad \alpha_4 \alpha_2, \quad \alpha_4 \alpha_3.$$

La symétrie à laquelle nous avons fait allusion plus haut se manifeste encore ici : les opérateurs du second groupe se déduisent du premier par simple multiplication à droite avec θ .

Nous avons vu que θ anticommute avec l'hamiltonien H . Cela nous permet de donner une signification générale à l'anticommutateur d'un opérateur ξ quelconque et de H . En effet si $A = i\xi\theta$, on a :

$$\kappa \dot{A} = i(H\xi\theta - \xi\theta H) = (H\xi + \xi H)i\theta.$$

Par conséquent, quel que soit ξ , on a :

$$i(H\xi + \xi H) = \kappa \frac{d(i\xi\theta)}{dt} \cdot \theta. \quad (4/16)$$

On sait l'importance des anticommutateurs de ce type dans la théorie ; la formule (4/16) montre comment on peut les réduire, grâce à l'emploi d'un opérateur donné une fois pour toutes, à des dérivées, c'est-à-dire au calcul d'un commutateur (Dans l'univers, le rôle de θ et H est joué par ω et S , qui, en particulier, anticommute. On peut écrire pour ce cas une formule analogue).

Prenons maintenant un opérateur ξ particulier, tel qu'il anticommute avec H , $H\xi + \xi H = 0$. Il en résulte ⁽¹⁾ que :

$$\frac{d(i\xi\theta)}{dt} = 0.$$

Donc, si ξ anticommute avec H , l'opérateur $\xi\theta$ est une inté-

(¹) Au second membre on a bien un produit de deux opérateurs, mais comme θ n'est pas diviseur de zéro, il est permis de multiplier les deux membres à droite par θ et la conclusion déduite est correcte.

grale première ; il en est de même de $\theta\xi$. Toute une série d'intégrales pourraient donc se déduire de la recherche des opérateurs qui anticommulent avec H .

L'intérêt de ce théorème réside en ce que, précisément, on peut trouver facilement toute une catégorie de pareils opérateurs. Reprenons en effet le cas particulier envisagé au paragraphe 15, d'un opérateur η commutant avec H^2 : *tous les seize opérateurs α sont dans ce cas*. On vérifie immédiatement le théorème inverse de celui du paragraphe 15 :

Lorsqu'un opérateur commute avec H^2 , sa dérivée anticommute avec H . Donc, les dérivées de tous les opérateurs α anticommulent avec H . Il s'ensuit immédiatement que $i\dot{\eta}\theta$ où η est un opérateur quelconque commutant avec H^2 , est une intégrale première ⁽¹⁾.

Retenons de ceci que les dérivées $\dot{\eta}$ des opérateurs α anticommulent avec H , tout comme θ . Par conséquent, on peut reprendre tous les raisonnements généraux conduits avec θ en remplaçant celui-ci par la dérivée $\dot{\eta}$ d'un opérateur α quelconque. La formule (4/16) reste valable en remplaçant θ par $\dot{\eta}$.

Le théorème s'énoncera alors : *le produit des dérivées de deux opérateurs α est une intégrale première*.

$$\frac{d}{dt}(\dot{\eta}_1\dot{\eta}_2) = 0.$$

Enfin, les raisonnements qui précèdent restent valables pourvu que les opérateurs qui interviennent anticommulent avec H . Or, ces opérateurs sont des cas particuliers des opé-

(1) Il est clair cependant que dans le cas particulier où η est un opérateur α , ces intégrales premières $\dot{\eta}\theta$ ne diffèrent pas de celles obtenues au paragraphe 15 et qui étaient égales à $HA + AH$. En effet :

$$\alpha\dot{\eta}\theta = H\eta\theta - \eta H\theta = H(\eta\theta) + (\eta\theta)H = HA + AH,$$

et le produit $A = \eta\theta$ de deux opérateurs α est encore un opérateur α .

rateurs « impairs », suivant la terminologie de M. Schrödinger. On peut montrer que : *le produit de deux opérateurs impairs est une intégrale première de l'équation de Dirac en l'absence de champ* ⁽¹⁾.

Passons maintenant à un autre genre de considérations. Soit de nouveau l'opérateur θ . On a :

$$\alpha \dot{\theta} = 2H\theta \quad \text{donc : } \theta = e^{\frac{2Ht}{\alpha}} \cdot \theta_0 \quad (6/16)$$

θ est donc un opérateur *purement oscillatoire*, le seul d'ailleurs parmi les 16 opérateurs fondamentaux qui jouisse de cette propriété. La période d'oscillation est la même que la période du mouvement de « vibration », découvert par Schrödinger. On peut donc essayer de rattacher cette « vibration » à l'existence de l'opérateur θ et à sa loi de variation. On peut arriver à mettre en évidence l'opérateur θ dans l'expression de tous les autres opérateurs α et à réduire la « vibration » de ceux-ci, à la « vibration » de θ .

Un théorème démontré plus haut nous a montré en effet que si η est un opérateur α quelconque,

$$\dot{\eta}\theta = \text{constante} = C.$$

On a donc d'une manière absolument générale $\dot{\eta} = C\theta$;
ou encore :

$$\dot{\eta} = \frac{\alpha}{2} CH^{-1}\dot{\theta},$$

donc :

$$\eta = \frac{\alpha}{2} CH^{-1}\theta + \text{constante}. \quad (7/16)$$

Seule la constante C varie lorsqu'on passe d'un opérateur η_1 à un autre η_2 . Elle est donnée par :

$$C = \frac{H\eta_2^0 + \eta_2^0 H}{\alpha}.$$

(1) Je dois ce théorème à M. Schrödinger.

Le premier terme de (7/16) est un opérateur impair, le second un opérateur pair (A ce point de vue, la décomposition en pair et impair s'obtient simplement en effectuant les calculs ; il vient, *quel que soit l'opérateur* η formé en multipliant des α_k :

$$\eta = \frac{1}{2} (\eta + H\eta H^{-1}) - \frac{1}{2} (H\eta H^{-1} - \eta),$$

ce qui est évident). On a par exemple, au moyen des intégrales premières déjà écrites, ou directement au moyen du tableau I :

$$\left. \begin{aligned} R &= icp_r H^{-1} \theta + \text{const.} \\ R_r &= -\frac{p_r}{mc} \omega + \text{const.} \\ (r &= 1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (8/16)$$

De plus :

$$mc^2 \dot{\theta} + H\omega = \text{const.}$$

conduit à :

$$R_4 = -\omega = imc^2 H^{-1} \dot{\theta} + \text{constante.}$$

Ce sont les cas où la constante C a la forme la plus simple.

Pour les α_k ($k=1, 2, 3, 4$), ces constantes sont plus compliquées. Posons cependant :

$$\dot{\alpha}_k \theta = \text{constante} = T_k \quad \text{ou} \quad \ddot{x}_k = cT_k \dot{\theta}; \quad (9/16)$$

les cT_k représentent en quelque sorte l'amplitude de l'accélération. On peut noter :

$$\sum_{k=1}^4 T_k p_k = 0 \quad (10/16)$$

parce que $\dot{H} = 0 = \Sigma p_k \dot{x}_k$. T_4 est particulièrement intéressant :

$$T_4 = \dot{\alpha}_4 \theta = -2ic \sum_r \sigma_r p_r.$$

On a non seulement $dT_4/dt = 0$, mais aussi $[dT_4/du] = 0$.

Considérons enfin quelques formules concernant les dérivées secondes par rapport au temps propre, ou plus exactement par rapport à u , qui nous seront utiles par la suite (Nous désignons ces dérivées par des accents $x'_k = [dx_k/du]$). Du tableau I on déduit, en prenant la dérivée de $\alpha_4 \alpha_1$, les formules déjà établies :

$$x''_k = \frac{2}{x} (Sx'_k - p_k) = \frac{2}{x} (p_k - x'_k S). \quad (11/16)$$

On a la formule analogue à (9/16) :

$$x''_k \cdot \omega = \text{constante d'univers}; \quad (12/16)$$

ω anticommute avec S et avec x'_k ; *il commute* donc avec x''_k d'après (11/16). On déduit de (12/16) que :

$$(x''_k)^* = \text{constante d'univers}. \quad (13/16)$$

Cette constante se calcule directement en multipliant (11/16) et en tenant compte du fait que :

$$S^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - \left(\frac{W}{c}\right)^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_4^2,$$

avec :

$$p_4 = -\frac{W}{ic}. \quad (14/16)$$

On a :

$$(x'_k)^* = 1$$

et :

$$(\mathcal{X}_k'')^2 = \frac{4}{x^2} (p_k^2 - S^2). \quad (15/16)$$

Ces quelques relations montrent comment les opérateurs R_k , θ et ω interviennent pour caractériser un électron de Dirac ; elles nous seront utiles au chapitre suivant.

CHAPITRE III

Interprétation physique.

17. **Covariants quadratiques.** — Les nouvelles caractéristiques de l'électron de Dirac proviennent des opérateurs nouveaux α , qu'on introduit ; ses nouvelles propriétés se refléteront donc dans la structure des moyennes observables qui correspondent à ces opérateurs. Les grandeurs intéressantes sont les densités spatiales, que nous appellerons « grandeurs quadratiques » ou « covariants quadratiques », et qui ont la forme bien connue d'une somme de quatre termes ; on a, par exemple, pour une des composantes du courant, à un facteur près :

$$\psi_1^* \psi_4 + \psi_4^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_3 + \psi_3^* \psi_2,$$

l'astérisque représentant, comme toujours, la quantité complexe conjuguée. Ce sont des « densités de moyennes », mais pour lesquelles on aurait déjà effectué la sommation par rapport à la variable de spin. Nous les représenterons symboliquement par le produit de trois matrices

$$\tilde{\psi}^* \xi \psi, \quad (1/17)$$

où ξ est un des 16 opérateurs α , où ψ est une matrice à une seule colonne, d'éléments, $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ et $\tilde{\psi}^*$ la matrice transposée et conjuguée. Ce produit se réduit à un seul élément et (1/17) représentera par convention la valeur numérique de cet élément.

Pour donner un sens physique à ces grandeurs quadrati-

ques, on s'appuie dans les divers cas qui se présentent sur des considérations de nature très différente. On fait appel par exemple aux lois de covariance de ces grandeurs quadratiques pour une transformation de Lorentz ; on utilise certaines relations différentielles (une équation de continuité par exemple), que nous appellerons relations de Gordon, parce qu'elles sont du type d'une décomposition que cet auteur a donnée pour la première fois ; on emploie des intégrales premières *d'opérateurs* et, enfin, on compare directement des expressions classiques aux expressions quantiques correspondantes. On arrive ainsi, en utilisant l'une ou l'autre de ces diverses manières de procéder, à une interprétation physique des covariants quadratiques que nous résumerons, d'après M. L. DE BROGLIE, dans le tableau II.

La première colonne contient la grandeur physique considérée, la seconde l'opérateur qui la représente ; la troisième la densité spatiale $\tilde{\Psi}^* \xi \Psi$ de cet opérateur, telle que $\int \tilde{\Psi}^* \xi \Psi \cdot dV$ soit la moyenne observable de ξ ; enfin, la quatrième colonne contient des indications sur la variance relativiste des expressions de la colonne précédente.

Dans ce qui suit, nous allons analyser d'un peu plus près certains arguments qui conduisent à cette interprétation physique, dans le but de les préciser. Pour cela, nous examinerons en détail la décomposition de Gordon, ainsi que les arguments tirés de la comparaison avec le calcul des opérateurs. Pour commencer, nous appliquerons les résultats au cas simple d'une onde plane, et ensuite, au cas très intéressant d'un paquet d'ondes.

Avant d'aborder cette analyse une remarque est nécessaire. L'interprétation précédente a essentiellement un caractère électrodynamique, ce qui est indispensable lorsqu'il s'agit d'un électron plongé dans un champ. Mais ici, nous nous sommes borné au cas de l'absence de champ et dans ce cas

TABLEAU II (d'après M. L. de Broglie).

Grandeur physique	Opérateur	Densité spatiale de la valeur moyenne	Variance
Masse propre ⁽¹⁾	$-m\alpha_4$	$-\tilde{\psi}^* \alpha_4 \psi = -m_0 \Omega_4$	Invariant
Courant électrique	$ec\alpha_1$ $ec\alpha_2$ $ec\alpha_3$	$j_x = ec \cdot \tilde{\psi}^* \alpha_1 \psi$ $j_y = ec \cdot \tilde{\psi}^* \alpha_2 \psi$ $j_z = ec \cdot \tilde{\psi}^* \alpha_3 \psi$	Vecteur d'univers
Charge électrique.	$-e \cdot 1$	$\hat{e} = -e \cdot \tilde{\psi}^* \cdot \psi$	
Moment magnétique $\left(\begin{matrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{matrix} \right)$	$B \cdot i\alpha_3\alpha_2\alpha_4$	$I_x = B \cdot \tilde{\psi}^* i\alpha_3\alpha_2\alpha_4 \psi$	Tenseur antisymétrique du second rang; $B = \frac{eh}{4\pi mc}$
	$B \cdot i\alpha_3\alpha_1\alpha_4$	$I_y = B \cdot \tilde{\psi}^* i\alpha_3\alpha_1\alpha_4 \psi$	
	$B \cdot i\alpha_1\alpha_2\alpha_4$	$I_z = B \cdot \tilde{\psi}^* i\alpha_1\alpha_2\alpha_4 \psi$	
	$B \cdot i\alpha_1\alpha_4$	$J_x = B \cdot \tilde{\psi}^* i\alpha_1 \alpha_4 \psi$	
	$B \cdot i\alpha_2\alpha_4$	$J_y = B \cdot \tilde{\psi}^* i\alpha_2 \alpha_4 \psi$	
Moment électrique $\left(\begin{matrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{matrix} \right)$	$B \cdot i\alpha_3\alpha_1$	$J_z = B \cdot \tilde{\psi}^* i\alpha_3 \alpha_1 \psi$	Tenseur complètement antisymétrique du troisième rang
	$\frac{h}{4\pi} \cdot i\alpha_3\alpha_2$	$\sigma_x = \frac{h}{4\pi} \cdot \tilde{\psi}^* i\alpha_3\alpha_2 \psi$	
	$\frac{h}{4\pi} \cdot i\alpha_3\alpha_1$	$\sigma_y = \frac{h}{4\pi} \cdot \tilde{\psi}^* i\alpha_3\alpha_1 \psi$	
	$\frac{h}{4\pi} \cdot i\alpha_1\alpha_2$	$\sigma_z = \frac{h}{4\pi} \cdot \tilde{\psi}^* i\alpha_1\alpha_2 \psi$	
	$\frac{h}{4\pi} \cdot i\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	$\sigma_l = \frac{h}{4\pi} \cdot \tilde{\psi}^* i\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \psi$	
Spin $\left\{ \begin{matrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{matrix} \right\}$	$\frac{h}{4\pi} \cdot i\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	$\Omega_2 = \tilde{\psi}^* \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \psi$	Tenseur complètement antisymétrique du quatrième rang
γ	$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$		
γ			

⁽¹⁾ Pour la justification de cette interprétation, L. de Broglie, voir *Comptes Rendus*, t. 495, 4932, p. 577.

la charge de l'électron n'intervient plus pour déterminer son mouvement : elle n'apparaît pas dans l'équation fondamentale. Le problème que nous envisageons est celui du mouvement d'un point matériel libre, donc un problème *de mécanique pure* et non pas d'électrodynamique. Or, même dans ce cas, les 16 covariants quadratiques existent et sont différents de zéro. Il doit donc être possible de leur donner une interprétation *purement mécanique*, ou au moins, se rendre compte pourquoi une pareille interprétation fait défaut. C'est à ce point de vue que nous nous placerons ici.

18. Décomposition de Gordon. — Gordon a écrit le courant sous la forme d'une somme de deux termes, en utilisant le fait que dans l'équation fondamentale la fonction ψ n'intervient pas uniquement par ses dérivées. L'équation de continuité que Dirac a utilisée dérive d'un raisonnement analogue. Ecrivons les relations générales.

L'équation d'onde $\kappa \partial \psi / \partial t + H \psi = 0$ s'écrit explicitement :

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \kappa \sum_1^3 \alpha_r \frac{\partial \psi}{\partial x_r} + m_0 c \alpha_4 \psi &= 0 \\ \frac{\kappa}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \kappa \alpha_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \kappa \alpha_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \kappa \alpha_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_3} + m_0 c \alpha_4 \psi &= 0. \quad (1/18) \end{aligned}$$

ψ représente une matrice. Prenons l'équation transposée et conjuguée, — opération qui a un sens parfaitement clair; on a :

$$-\kappa \frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial t} - \kappa \sum_{r=1}^3 \frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial x_r} \alpha_r + m_0 c \tilde{\psi}^* \alpha_4 = 0 \quad (2/18)$$

(Remarquons en passant que si l'on pose $\Phi = \tilde{\psi}^* \alpha_4$, on a :

$$\kappa \frac{\partial \psi}{\partial t} + H \psi = 0 \quad \text{et} \quad -\kappa \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Phi H = 0, \quad (3/18)$$

équations que nous rencontrerons plus loin). On déduit de (1/18) et (2/18) :

$$\psi = -\frac{\kappa}{m_0 c} \left(\frac{1}{c} \alpha_4 \frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{r=1}^3 \alpha_4 \alpha_r \frac{\partial \psi}{\partial x_r} \right) \quad (4/18)$$

et :

$$\tilde{\psi}^* = \frac{\kappa}{m_0 c} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial t} \alpha_4 + \sum_{r=1}^3 \frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial x_r} \alpha_r \alpha_4 \right). \quad (5/18)$$

Soit alors ξ l'un quelconque des 16 opérateurs formé avec les α_k par multiplication; suivant le procédé bien connu, multiplions la matrice (4/18) par $\tilde{\psi}^* \xi$ à gauche et (5/18) par $\xi \psi$ à droite. En retranchant on a :

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial t} \alpha_4 \xi \psi + \tilde{\psi}^* \xi \alpha_4 \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \\ + \sum_{r=1}^3 \left(\frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial x_r} \alpha_r \alpha_4 \xi \psi + \tilde{\psi}^* \xi \alpha_4 \alpha_r \frac{\partial \psi}{\partial x_r} \right), \end{aligned} \quad (6/18)$$

et en ajoutant :

$$\begin{aligned} 2\tilde{\psi}^* \xi \psi = \frac{\kappa}{m_0 c} \left[\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial t} \alpha_4 \xi \psi - \tilde{\psi}^* \xi \alpha_4 \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{r=1}^3 \left(\frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial x_r} \alpha_r \alpha_4 \xi \psi - \tilde{\psi}^* \xi \alpha_4 \alpha_r \frac{\partial \psi}{\partial x_r} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7/18)$$

En remplaçant ξ par tous les opérateurs α , nous aurons les relations qui nous intéressent. Il est inutile de les écrire toutes; analysons-en seulement la structure.

Remarquons que les termes qui interviennent sont de deux types :

A) des expressions de la forme :

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \Lambda \psi + \tilde{\psi}^* \Lambda \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

qui se réduisent à des dérivées $\frac{\partial(\psi^* \Lambda \psi)}{\partial x}$, et :

B) des expressions du type :

$$\frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial x} A \psi - \tilde{\psi}^* A \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

L'apparition des termes A ou B est reliée aux propriétés de commutation de ξ avec les α_k . Par exemple si ξ commute avec α_4 et anticommute avec tous les α_r , donc si $\xi = \alpha_4$, (6/18) s'écrit :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\psi}^* \psi) + \sum_{r=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_r} (\tilde{\psi}^* \alpha_r \psi) = 0. \quad (8/18)$$

Le premier membre est une divergence d'univers et l'équation est l'équation de continuité du courant électrique. Par contre, si ξ anticommute avec α_4 mais commute avec α_r , donc si $\xi = -i\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ on a seulement une divergence tridimensionnelle et (6/18) devient :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial t} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \psi - \tilde{\psi}^* \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \\ & \quad + \sum_{r=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_r} (\tilde{\psi}^* \alpha_r \psi) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9/18)$$

qui s'écrit :

$$\frac{i}{c} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial t} \theta \psi - \tilde{\psi}^* \theta \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \sum_{r=1}^3 \frac{\partial \sigma_r}{\partial x_r} = 0,$$

avec les notations du paragraphe 16.

Pour $\xi = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, c'est la relation (7/18) qui contient une dérivée d'univers ⁽¹⁾ ; on a :

$$2\tilde{\psi}^* \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \psi = \frac{\hbar}{m_0 c} \left[-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\psi}^* \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \psi) - \sum_{r=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_r} (\tilde{\psi}^* \alpha_r \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \psi) \right], \quad (10/18)$$

⁽¹⁾ Voir UHLENBECK et LAPORTE, *Physical Review*, 37, 1931, p. 1552.

et pour $\xi = 1$, une divergence tridimensionnelle :

$$2\tilde{\psi}^* \psi = \frac{\kappa}{m_0 c} \left[\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial t} \alpha_4 \psi - \tilde{\psi}^* \alpha_4 \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \sum_{r=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_r} (\tilde{\psi}^* \alpha_r \alpha_4 \psi) \right]. \quad (11/18)$$

La formule primitive de Gordon s'obtient en faisant $\xi = \alpha_4$, par exemple. On a :

$$2\tilde{\psi}^* \alpha_4 \psi = \frac{\kappa}{m_0 c} \left[- \left(\frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial x_1} \alpha_4 \psi - \tilde{\psi}^* \alpha_4 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\psi}^* \alpha_4 \alpha_1 \psi) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\psi^* \alpha_4 \alpha_1 \alpha_2 \psi) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\tilde{\psi}^* \alpha_3 \alpha_4 \alpha_1) \right]. \quad (12/18)$$

La première parenthèse du second membre représente le « courant de Schrödinger » et les trois autres la contribution au courant total, des moments électrique et magnétique de l'électron. Notons encore, pour $\xi = \alpha_2 \alpha_3$:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\psi}^* i \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \psi) + i \left(\frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial x_1} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \psi - \tilde{\psi}^* \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\tilde{\psi}^* i \alpha_4 \alpha_2 \psi) - \frac{\partial}{\partial x_2} (\tilde{\psi}^* i \alpha_4 \alpha_3 \psi) = 0. \quad (13/18)$$

Considérons maintenant, dans les formules (6/18) et (7/18), les termes du type B, *qui ne se réduisent pas à des dérivées*. Ces termes sont très importants; nous les appellerons *termes macroscopiques* pour la raison suivante, qui précise leur signification. Lorsqu'on intègre dans tout l'espace la densité spatiale $\tilde{\psi}^* \xi \psi$, on obtient une quantité $\int \tilde{\psi}^* \xi \psi . dV$, observable macroscopiquement. Or, dans cette intégration, *tous les termes qui se réduisent à des dérivées* dans le second membre de (7/18), disparaissent, dans les conditions aux limites habituelles, et il ne reste plus que la contribution des termes « macroscopiques » du type B, et aussi, éventuellement, des dérivées de moyennes par rapport

au temps. Pour les cas stationnaires, ce sont les termes du type B qui donnent le mouvement macroscopique.

Considérons un autre aspect de la question. Si nous avons affaire à un état décrit par une onde plane du type :

$$\psi_s = a_s \exp \left(\frac{px + qy + rz - Wt}{\kappa} \right) \quad (a_s = \text{constantes})$$

les densités $\bar{\psi}^* \xi \psi$ seront des constantes. Donc, lorsqu'on applique les formules (6/18), (7/18) à ce cas, *tous les termes qui se réduisent à des dérivées s'annulent* et seuls les termes macroscopiques donnent une contribution, par exemple :

$$\frac{\partial \bar{\psi}^*}{\partial x_1} \xi \psi - \bar{\psi}^* \xi \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = -\frac{2}{\kappa} p(\bar{a}^* \xi a) = -\frac{2}{\kappa} p(\bar{\psi}^* \xi \psi). \quad (14/18)$$

On peut donc écrire immédiatement les relations entre densités, à l'aide de (6/18) et (7/18). Ceci fixe la signification et montre l'importance pratique des termes du type B.

Lorsque l'opérateur ξ est hermitique, ces termes sont toujours purement imaginaires ; dans les formules précédentes le facteur i ou κ rétablit toujours la réalité. On peut rattacher en un certain sens ces grandeurs aux opérateurs, en observant qu'on peut écrire :

$$\kappa \left(\frac{\partial \bar{\psi}^*}{\partial x_r} \xi \psi - \bar{\psi}^* \xi \frac{\partial \psi}{\partial x_r} \right) = \kappa \frac{\partial}{\partial x_r} (\bar{\psi}^* \xi \psi) - 2 \bar{\psi}^* \left(\xi \kappa \frac{\partial}{\partial x_r} \right) \psi. \quad (15/18)$$

La moyenne de ce terme est égale, au facteur -2 près, à la moyenne de l'opérateur :

$$\xi p_r \quad (r = 1, 2, 3). \quad (16/18)$$

Les opérateurs qui correspondent dans ce sens aux termes du type B sont donc les produits de ξ par les opérateurs de la quantité de mouvement.

Ces termes satisfont enfin à une relation importante que nous allons établir. On déduit de (4/18) et (5/18) que :

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_0^2 c^2}{x^2} \psi &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} = \square \psi, \\ \frac{m_0^2 c^2}{x^2} \tilde{\psi}^* &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}^*}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{\psi}^*}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \tilde{\psi}^*}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \tilde{\psi}^*}{\partial x_3^2} = \square \tilde{\psi}^*. \end{aligned} \right\} (17/18)$$

Si ξ est un opérateur α , on déduit en ajoutant après multiplication :

$$\frac{2m_0^2 c^2}{x^2} \tilde{\psi}^* \xi \psi = \tilde{\psi}^* \xi \cdot \square \psi + \square \tilde{\psi}^* \cdot \xi \psi. \quad (18/18)$$

et en retranchant, après transformation :

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial t} \xi \psi - \tilde{\psi}^* \xi \frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial t} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial x_1} \xi \psi - \tilde{\psi}^* \xi \frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial x_1} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial x_2} \xi \psi - \tilde{\psi}^* \xi \frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial x_3} \xi \psi - \tilde{\psi}^* \xi \frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial x_3} \right) = 0, \end{aligned} \quad (19/18).$$

19. Interprétation physique. Ondes planes. — Appliquons les résultats du paragraphe précédent au cas simple d'une onde ψ plane, cas susceptible de nous donner d'utiles indications. Ainsi que nous l'avons mentionné, nous envisageons le problème purement mécanique du mouvement d'un point matériel ; corrélativement, nous caractérisons les propriétés de ce point par les 16 covariants quadratiques $\tilde{\psi}^* \xi \psi$, sans le facteur c et même sans les autres facteurs constants, qui les accompagnent dans le tableau II. Nous désignerons donc ces grandeurs par d'autres lettres que dans le tableau II ; *précisons leurs valeurs* et donnons aussi la relation entre ces notations et celles du tableau II.

Le « courant » et la « charge » seront donnés par :

$$\left. \begin{aligned} j_1 &= \frac{1}{ec} j_x = \tilde{\psi}^* \alpha_1 \psi = \psi_1^* \psi_4 + \psi_4^* \psi_1 + \psi_3^* \psi_3 + \psi_3^* \psi_2 \\ j_2 &= \frac{1}{ec} j_y = \tilde{\psi}^* \alpha_2 \psi = -i\psi_1^* \psi_4 + i\psi_4^* \psi_1 + i\psi_2^* \psi_3 - i\psi_3^* \psi_2 \\ j_3 &= \frac{1}{ec} j_z = \tilde{\psi}^* \alpha_3 \psi = \psi_1^* \psi_3 + \psi_3^* \psi_1 - \psi_2^* \psi_4 - \psi_4^* \psi_2 \\ \rho &= \frac{1}{e} \delta = -\tilde{\psi}^* \psi = -\psi_1^* \psi_1 - \psi_2^* \psi_2 - \psi_3^* \psi_3 - \psi_4^* \psi_4 \end{aligned} \right\} (1/19)$$

Le moment magnétique sera désigné par :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{B} I_x = \tilde{\psi}^* i \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \psi = -\psi_1^* \psi_2 - \psi_2^* \psi_1 + \psi_3^* \psi_4 + \psi_4^* \psi_3 \\ \sigma_2 &= \frac{1}{B} I_y = \tilde{\psi}^* (-i \alpha_3 \alpha_4 \alpha_1) \psi = +i\psi_1^* \psi_2 - i\psi_2^* \psi_1 - i\psi_3^* \psi_4 + i\psi_4^* \psi_3 \\ \sigma_3 &= \frac{1}{B} I_z = \tilde{\psi}^* i \alpha_4 \alpha_1 \alpha_2 \psi = -\psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2 + \psi_3^* \psi_3 - \psi_4^* \psi_4 \end{aligned} \quad (2/19)$$

et le moment électrique par :

$$\begin{aligned} \pi_1 &= -\frac{1}{B} J_x = \tilde{\psi}^* i \alpha_1 \alpha_4 \psi = i\psi_1^* \psi_4 - i\psi_4^* \psi_1 + i\psi_2^* \psi_3 - i\psi_3^* \psi_2 \\ \pi_2 &= -\frac{1}{B} J_y = \tilde{\psi}^* i \alpha_4 \alpha_2 \psi = \psi_1^* \psi_4 + \psi_4^* \psi_1 - \psi_2^* \psi_3 - \psi_3^* \psi_2 \\ \pi_3 &= -\frac{1}{B} J_z = \tilde{\psi}^* i \alpha_4 \alpha_3 \psi = i\psi_1^* \psi_3 - i\psi_3^* \psi_1 + i\psi_2^* \psi_2 - i\psi_2^* \psi_4. \end{aligned} \quad (3/19)$$

Désignons le « spin » par :

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{4\pi}{h} \sigma_x = \tilde{\psi}^* i \alpha_2 \alpha_3 \psi = -\psi_1^* \psi_2 - \psi_2^* \psi_1 - \psi_3^* \psi_4 - \psi_4^* \psi_3 \\ S_2 &= \frac{4\pi}{h} \sigma_y = \tilde{\psi}^* i \alpha_3 \alpha_1 \psi = i\psi_1^* \psi_2 - i\psi_2^* \psi_1 + i\psi_3^* \psi_4 - i\psi_4^* \psi_3 \\ S_3 &= \frac{4\pi}{h} \sigma_z = \tilde{\psi}^* i \alpha_1 \alpha_2 \psi = -\psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2 - \psi_3^* \psi_3 + \psi_4^* \psi_4 \\ S_4 &= -\frac{4\pi}{h} \sigma_t = -\tilde{\psi}^* i \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \psi = \psi_1^* \psi_3 + \psi_3^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_4 + \psi_4^* \psi_2 \end{aligned} \quad (4/19)$$

et enfin les deux invariants découverts par DARWIN, par :

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= \bar{\psi}^* \alpha_4 \psi &= \psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2 - \psi_3^* \psi_3 - \psi_4^* \psi_4 \\ \Omega_2 &= \bar{\psi}^* \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \psi &= -i \psi_1^* \psi_3 + i \psi_3^* \psi_1 - i \psi_2^* \psi_4 + i \psi_4^* \psi_2. \end{aligned} \right\} (5/19)$$

Cela étant, soit un électron dans un état d'énergie déterminée W et ayant une quantité de mouvement p, q, r ; la fonction ψ sera une onde plane de la forme :

$$\psi_s = a_s e^{\frac{i}{\hbar} (px_1 + qx_2 + rx_3 - Wt)}, \quad (6/19)$$

avec :

$$\left(\frac{W}{c} \right)^2 = p^2 + q^2 + r^2 + m_0^2 c^2.$$

En remplaçant ces valeurs dans les relations (6/18), (7/18) et en tenant compte de l'observation suivant laquelle seuls les termes de type B donnent des contributions non nulles, on obtient facilement des relations algébriques entre les grandeurs quadratiques de l'électron, qui nous faciliteront la compréhension de leurs relations mutuelles.

Toute la discussion est dominée par l'observation que *pour une onde plane, l'invariant Ω_2 est identiquement nul, $\Omega_2 \equiv 0$; cela résulte de la relation (7/18), pour $\xi = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$.*

Une première conséquence est l'absence de tout moment électrique propre de l'électron. En effet, on a la relation, facilement vérifiable

$$\sigma_1 \pi_1 + \sigma_2 \pi_2 + \sigma_3 \pi_3 = \Omega_1 \Omega_2 \equiv 0. \quad (7/19)$$

Le premier membre est un invariant ; il garde la même valeur nulle pour tout système d'axes et, en particulier, pour celui qui se déplace avec l'électron dans son mouvement de translation et dans lequel le moment magnétique est dirigé suivant l'un de ces axes ; on a :

$$\sigma_3 \pi_3 = 0,$$

donc :

$$\pi_3 = 0 \quad \text{si} \quad \pi_1 = \pi_2 = 0.$$

La signification du premier invariant résulte d'une relation générale établie par DARWIN⁽¹⁾,

$$j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 - \rho^2 = -(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) = -\Omega_1^2. \quad (8/19)$$

Le carré de Ω_1 donne donc *la valeur absolue du carré de la longueur du vecteur courant d'univers*; ce dernier est, comme toujours, un vecteur du genre temps,

$$j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 - \rho^2 < 0.$$

On peut exprimer ses composantes en fonction de Ω_1 ; (12/18) et (11/18) donnent :

$$j_1 = \frac{p}{m_0 c} \Omega_1, \quad j_2 = \frac{q}{m_0 c} \Omega_1, \quad j_3 = \frac{r}{m_0 c} \Omega_1, \quad \rho = -\frac{W}{m_0 c^2} \Omega_1. \quad (9/19)$$

Le courant est dirigé suivant l'impulsion d'univers et lui est proportionnel. Pour obtenir une image intuitive, considérons un système déterminé d'axes et traçons les vecteurs moment magnétique $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ et moment électrique (π_1, π_2, π_3) , ainsi que le nouveau vecteur « spin » (S_1, S_2, S_3) . La relation (6/18) donne, pour $\xi = 1$,

$$p\pi_1 + q\pi_2 + r\pi_3 = 0, \quad (10/19)$$

et d'après (7/19) :

$$\sigma_1\pi_1 + \sigma_2\pi_2 + \sigma_3\pi_3 = 0. \quad (7/19)$$

Donc, *dans l'espace*, si p, q, r est la quantité de mouvement, le courant est dirigé suivant p, q, r et le moment élec-

(1) C. G. DARWIN, *Proc. Roy. Soc. A* 118, 1928, p. 654.

trique est normal tant à ce courant qu'au moment magnétique σ . De plus, (7/18) donne avec $\xi = i\alpha_4\alpha_1, \dots$

$$\left. \begin{aligned} m_0 c \pi_1 &= qS_3 - rS_2 \\ m_0 c \pi_2 &= rS_1 - pS_3 \\ m_0 c \pi_3 &= pS_2 - qS_1 \end{aligned} \right\} \quad (11/19)$$

ce qui montre que (S_1, S_2, S_3) se trouve dans le plan formé par p, q, r , et le moment magnétique σ .

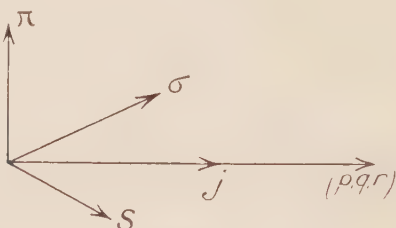


Fig. 1

On obtient cependant une image plus saisissante en considérant, au lieu des vecteurs d'espace, des vecteurs d'univers : l'impulsion $\left(p, q, r, -\frac{W}{c}\right)$ d'une part et le vecteur $\mathbf{S}$ (S_1, S_2, S_3, S_4) de l'autre. On peut écrire une relation tout à fait analogue à celle trouvée par Darwin :

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - S_4^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2 = \Omega^2. \quad (12/19)$$

$\mathbf{S}$ est donc un vecteur ayant même longueur d'univers que le vecteur courant $\mathbf{j}$; à l'encontre de celui-ci, il est cependant du genre espace :

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - S_4^2 > 0.$$

Prenons la formule (6/18) avec :

$$\xi = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4;$$

on a :

$$pS_1 + qS_2 + rS_3 - \left(-\frac{W}{c}\right) S_4 = 0$$

et :

$$j_1S_1 + j_2S_2 + j_3S_3 - \rho S_4 = 0, \quad (13/19)$$

ce qui montre que le *quadrivecteur S* est normal au courant d'univers.

Pour caractériser complètement un électron, il suffira donc de donner son impulsion d'univers et le vecteur *S*. Montrons, en effet, que le moment magnétique et le moment électrique s'en déduisent immédiatement. La relation (7, 18) avec $\xi = i\alpha_2\alpha_3\alpha_4, \dots$ et $\xi = i\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, donne :

$$\begin{aligned} \Omega_1\sigma_1 &= j_1S_4 - \rho S_1 \\ \Omega_2\sigma_2 &= j_2S_4 - \rho S_2 \\ \Omega_3\sigma_3 &= j_3S_4 - \rho S_3 \end{aligned} \quad (14/19)$$

et $p\sigma_1 + q\sigma_2 + r\sigma_3 + \Omega_1S_4 = 0,$

tandis que la même équation, pour

$$\xi = i\alpha_4\alpha_1, \quad \xi = i\alpha_4\alpha_2 \quad \text{et} \quad \xi = i\alpha_4\alpha_3,$$

donne :

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1\pi_1 &= j_2S_3 - j_3S_2 \\ \Omega_2\pi_2 &= j_3S_1 - j_1S_3 \\ \Omega_3\pi_3 &= j_1S_2 - j_2S_1 \end{aligned} \right\} \quad (15/19)$$

Donc, en résumé, on peut dire qu'un électron libre est caractérisé par deux vecteurs d'univers à angle droit : le courant *j*, ne dépendant que de la translation $\left(p, q, r, -\frac{W}{c}\right)$ et le vecteur *S*, qui ne dépend que du spin. Ces deux vecteurs sont égaux en valeur absolue, mais le premier est du genre temps, tandis que le second est du genre espace. La polarisation de l'électron est déterminée par l'azimut du vecteur d'univers *S* autour de la direction de propagation, ce qui rapproche l'image utilisée de celle de la théorie électromagnétique de la lumière. *S* caractérise la rotation de

l'électron, tout comme le courant $\mathbf{j}$ caractérise sa *translation*. Le moment de l'électron s'obtient en prenant le produit vectoriel de $\mathbf{S}$ et $\mathbf{j}$.

Ce qui précède nous montre la manière dont on peut analyser le problème, dans le cas simple d'un électron décrit par une onde plane. Il ressort de cette analyse que, pour l'étude d'un tel électron, il est beaucoup plus simple de recourir à des images « d'univers » qu'à des images dans l'espace. On voit également, qu'il semble tout indiqué pour le cas qui nous préoccupe, *d'introduire systématiquement le vecteur d'univers $\mathbf{S}$* , et on peut penser que les avantages qu'il comporte subsisteront, même dans le cas général. Revenons donc au cas général et examinons d'un peu plus près le vecteur « spin » $\mathbf{S}$.

20. Cas général. Le vecteur d'univers $\mathbf{S}$. — Un électron possède, dans le cas général, un moment magnétique et un moment électrique, notions qui nous sont familières et que nous concevons sans aucune peine; les densités correspondantes (sans facteur constant) sont $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ et π_1, π_2, π_3 . Un électron de Dirac possède également un « spin » dont les opérateurs sont $i\alpha_2\alpha_3, i\alpha_3\alpha_1, i\alpha_1\alpha_2$ et par conséquent les *densités* de moyenne S_1, S_2, S_3 . S_4 est la densité de moyenne de l'opérateur $i\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, dont nous ne connaissons pas l'interprétation. Or, le spin *n'a pas les mêmes caractères de variance* que le moment magnétique et électrique de l'électron. Les densités correspondantes S_1, S_2, S_3 et S_4 se transforment comme les composantes d'un vecteur d'univers du genre espace, tandis que σ_r, π_r ($r=1, 2, 3$) se transforment comme un tenseur antisymétrique du deuxième rang. La direction de la densité de spin S_1, S_2, S_3 ne coïncide pas avec celle de la densité de moment magnétique; cette coïncidence n'a lieu qu'*au repos*.

En effet, introduisons deux vecteurs auxiliaires D et E au moyen des formules :

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \psi_3^* \psi_4 + \psi_4^* \psi_3 & E_1 &= -\psi_1^* \psi_2 - \psi_2^* \psi_1 \\ D_2 &= -i\psi_3^* \psi_4 + i\psi_4^* \psi_3 & E_2 &= i\psi_1^* \psi_2 - i\psi_2^* \psi_1 \\ D_3 &= \psi_3^* \psi_3 - \psi_4^* \psi_4 & E_3 &= -\psi_1^* \psi_1 - \psi_2^* \psi_2 \end{aligned} \right\} \quad (1/20)$$

D_r représente, à un facteur près, la valeur du moment magnétique de l'électron *au repos* $(\sigma_r)_0$ dont Darwin (*loc. cit.*) a signalé l'importance. On sait qu'au repos $\psi_1 = \psi_2 = 0$. Donc, dans ce cas, $E_r = 0$, et le moment (2/19) se réduit à D_r . Si σ_r est le moment magnétique de l'électron, *on a toujours*, d'après (2/19) (4/19) et (1/20) :

$$\sigma_r = D_r + E_r \quad S_r = E_r - D_r \quad (r = 1, 2, 3). \quad (2/20)$$

Donc :

$$\sigma_r - S_r = 2D_r.$$

Au repos, $E_r = 0$, donc :

$$\left. \begin{aligned} (S_r)_0 &= -D_r = -(\sigma_r)_0 \\ (S_4)_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3/20)$$

et de plus :

Pour un électron au repos, la composante de temps de $\mathbf{S}$ est nulle et les trois autres sont égales et de signe contraire à celles du moment magnétique. Lorsque l'électron se met en mouvement, cette coïncidence cesse. S_r et σ_r font un angle et restent tels que leur différence vectorielle est constante et égale à D_r . Remarquons que les conclusions précédentes (2/20) et (3/20) sont indépendantes du signe de l'énergie.

En un mot, pour un électron de Dirac, non seulement la vitesse et la quantité de mouvement ont des directions différentes, mais aussi le spin et le moment magnétique sont des éléments distincts, et même plus différents que dans le cas précédent, puisque les caractères de variance ne sont plus

les mêmes. La question se pose alors de trouver quel est le lien qui les rattache l'un à l'autre. Précisons.

Considérons d'abord l'image classique d'une sphère solide tournant uniformément autour d'une direction déterminée qui passe par son centre; elle a un moment cinétique bien déterminé. Chargeons-la électriquement; elle aura un moment magnétique, dont on trouvera les composantes en multipliant celles du *moment cinétique* par un même facteur constant. Si le centre de la sphère, tournante et chargée, est animé en outre d'un mouvement de translation, elle aura un moment magnétique, mais pour le trouver il ne suffira plus de multiplier les composantes du moment cinétique par un facteur constant. Le problème que nous nous posons est le suivant; quelle est la grandeur *mécanique* dont il suffira de multiplier les composantes par un même facteur déterminé, pour avoir le moment magnétique, dans le cas du mouvement?

Revenons au cas de l'électron de Dirac. Remarquons que d'une part nous concluons que S_1, S_2, S_3 sont des densités de spin, parce que $i\alpha_2\alpha_3, i\alpha_3\alpha_1, i\alpha_1\alpha_2$ est le moment cinétique propre; nous employons donc des *considérations purement mécaniques* (concernant des *opérateurs*). D'autre part, nous attribuons à $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ le caractère de densités de moment magnétique, en nous basant sur les raisonnements de Darwin, c'est-à-dire sur une *analyse purement électro-magnétique* (portant sur des *densités*).

Il semble très désirable d'avoir dans ce cas des raisonnements homogènes, ayant un point de départ unique. Nous pouvons alors poser le problème de la façon suivante: *étant donné que $i\alpha_2\alpha_3, \dots$ représentent les composantes du moment cinétique de l'électron, quelle grandeur mécanique représenteront les opérateurs ternaires $i\alpha_2\alpha_3\alpha_4, i\alpha_3\alpha_4\alpha_1, i\alpha_4\alpha_1\alpha_2$, et aussi $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$?* Nous cherchons donc l'interprétation *mécanique* des opérateurs dont les densités de moyenne représentent le moment magnétique de l'électron.

La manière d'y arriver sera exactement la même que celle employée pour conclure que $i\alpha_2\alpha_3, \dots$ représentent à un facteur près les composantes du spin de l'électron : les $i\alpha_2\alpha_3\alpha_4, \dots$, se présenteront comme les opérateurs qu'il faut ajouter à certaines expressions pour les rendre constantes. Il s'agit précisément de trouver ces expressions.

21. Considérations classiques. — Abstraction faite de toute théorie des quanta, considérons un point matériel en mouvement libre. Aucune des grandeurs dynamiques qui s'y rattachent en mécanique classique ne semble pouvoir jouer le rôle des expressions dont nous avons besoin. En réalité, ainsi que nous le verrons dans un instant, les grandeurs classiques qui nous intéressent sont *identiquement nulles*, dès que le point matériel considéré est *dépourvu de spin*, comme c'est le cas pour l'électron classique.

Pour analyser correctement le phénomène et trouver une image convenable, il faudra donc raisonner sur un mobile se rapprochant de l'électron de Dirac *plus* que ne le fait le point matériel classique. Or, l'électron de Dirac est caractérisé par l'existence d'un spin (représenté par un opérateur *variable*), ou, mieux encore, par le fait *que sa vitesse et sa quantité de mouvement forment deux vecteurs absolument distincts en grandeur et en direction* ; pour avoir une image correcte, nous devons donc faire appel à un mobile qui jouisse de la même propriété.

Considérons donc un mobile dont la direction de la quantité de mouvement ne coïncide pas avec celle de sa vitesse, même en absence de tout champ. Nous ne connaissons pas les lois du mouvement, mais celui-ci ayant lieu en absence de tout champ extérieur, il est raisonnable d'admettre qu'il se poursuit dans les mêmes conditions que pour un point matériel classique, c'est-à-dire à *quantité de mouvement constante*, $p_k = \text{const.}$ Examinons les conséquences de ces hypothèses dans le cadre des conceptions classiques.

On peut remarquer tout d'abord, que dans ces conditions, le moment cinétique d'orbite n'est plus constant, comme pour un point matériel classique :

$$x_2 p_3 - x_3 p_2 \neq \text{const.}, \quad \text{puisque : } v_2 p_3 - v_3 p_2 \neq 0, \quad (1/21)$$

et qu'il faut *lui ajouter un autre moment* pour satisfaire au théorème des aires. Soit A_r ce moment, de façon qu'on ait par exemple :

$$v_2 p_3 - v_3 p_2 + A'_1 = 0,$$

donc :

$$x_2 p_3 - x_3 p_2 + A_1 = \text{const.} = m_{23}. \quad (2/21)$$

Réciproquement si $x_2 p_3 - x_3 p_2$ n'est plus constant, mais égal à une constante m_{23} plus $(-A_1)$, la quantité de mouvement ne sera plus proportionnelle à la vitesse, $p_r \neq mv_r$.

Nous ne connaissons pas la loi de mouvement d'un pareil point image, mais elle ne nous intéresse pas ici ; on peut affirmer seulement que l'expression classique de l'énergie cinétique $2T = \Sigma mv^2$ n'est plus valable et que les nombreux résultats qui en découlent devront être modifiés.

Remarquons seulement que si nous admettons l'existence de l'inégalité $p_r \neq mv_r$, il devient *indispensable*, pour caractériser complètement notre mobile, d'indiquer aussi quel est l'*écart* entre sa quantité de mouvement et sa vitesse. Quel peut être l'élément analytique susceptible de mesurer cet écart ?

Il est évident que le choix de cet élément comporte une large part d'arbitraire. Il existe cependant une expression analytique qui s'impose ; elle s'introduit tout aussi naturellement dans ce domaine, que le moment cinétique ordinaire dans l'étude des rotations. Considérons en effet l'angle entre $\mathbf{p}$ et $\mathbf{v}$; il mesure effectivement l'écart cherché. Mais il faut tenir compte que les effets dynamiques dépendront très probablement aussi de la distance du point matériel considéré

à l'axe instantané de rotation, — comme dans le cas des rotations précédemment cité. Nous avons donc en réalité trois vecteurs $\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$ et $\mathbf{v}$ dont les positions relatives nous inté-

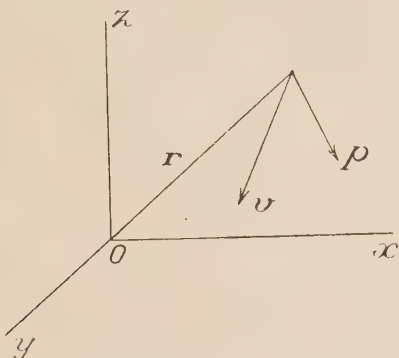


Fig. 2

ressent. La quantité qui mesure globalement de la façon la plus simple et la plus naturelle la grandeur de leur écart relatif est certainement le volume du *parallélépipède* construit sur ces trois vecteurs soit :

$$V = (\mathbf{v}[\mathbf{r} \times \mathbf{p}]) = (\mathbf{r}[\mathbf{p} \times \mathbf{v}]) = (\mathbf{p}[\mathbf{v} \times \mathbf{r}]),$$

ou encore

$$C_{123} = v_1(x_2p_3 - x_3p_2) + v_2(x_3p_1 - x_1p_3) + v_3(x_1p_2 - x_2p_1), \quad (3/21)$$

ou une quantité proportionnelle à celle-ci.

Dans l'espace-temps, chacun de ces vecteurs sera complété par une quatrième composante de temps et nous aurons à considérer : la vitesse d'univers, que nous désignerons toujours par v_1, v_2, v_3, v_4 , le rayon vecteur d'univers $x_1, x_2, x_3, x_4 = ict$, et l'impulsion d'univers $p_1, p_2, p_3, p_4 = -W/ic$. Il est naturel alors de considérer en relativité non seulement

la grandeur $(3/21)$, mais de compléter celle-ci par les trois autres qui s'en déduisent par permutations circulaires, c'est-à-dire :

$$\left. \begin{aligned} C_{123} &= v_1(x_2 p_3 - x_3 p_2) + v_2(x_3 p_1 - x_1 p_3) + v_3(x_1 p_2 - x_2 p_1) \\ C_{231} &= v_2(x_3 p_1 - x_1 p_3) + v_3(x_1 p_2 - x_2 p_1) + v_4(x_2 p_3 - x_3 p_2) \\ C_{341} &= v_3(x_4 p_1 - x_1 p_4) + v_4(x_1 p_3 - x_3 p_1) + v_1(x_3 p_4 - x_4 p_3) \\ C_{412} &= v_4(x_1 p_2 - x_2 p_1) + v_1(x_2 p_4 - x_4 p_2) + v_2(x_4 p_1 - x_1 p_4) \end{aligned} \right\} (4/21)$$

L'ensemble de ces quatre composantes forme l'élément analytique que nous cherchons.

22. Moments de divers ordres. — Remarquons que, du point de vue analytique, $(4/21)$ est une généralisation immédiate du moment cinétique classique. En effet, ce dernier est un tenseur antisymétrique du second rang (6 composantes), obtenu en prenant tous les déterminants qu'on peut former au moyen des éléments du tableau suivant :

$$\left\| \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{array} \right\| \quad (1/22)$$

Si l'on complète ce tableau par une ligne formée par les dérivés des éléments de la première (par rapport au temps propre), on a :

$$\left\| \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{array} \right\|. \quad (2/22)$$

On peut former à partir de ce tableau quatre déterminants du troisième ordre *qui sont précisément les quatre grandeurs* $(4/21)$:

$$\left. \begin{aligned} C_{123} &= \left| \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{array} \right| & C_{234} &= \left| \begin{array}{ccc} v_2 & v_3 & v_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ p_2 & p_3 & p_4 \end{array} \right| \\ C_{341} &= \left| \begin{array}{ccc} v_3 & v_4 & v_1 \\ x_3 & x_4 & x_1 \\ p_3 & p_4 & p_1 \end{array} \right| & C_{412} &= \left| \begin{array}{ccc} v_4 & v_1 & v_2 \\ x_4 & x_1 & x_2 \\ p_4 & p_1 & p_2 \end{array} \right| \end{aligned} \right\} (3/22)$$

A l'heure actuelle on emploie de plus en plus fréquemment le terme « moment » pour désigner la quantité de mouvement du mobile considéré. Pour arriver à une nomenclature unitaire, on pourrait l'appeler « moment de premier ordre ». Le « moment du second ordre » serait alors le moment cinétique ou « angulaire », de composantes $x_2 p_3 - x_3 p_2$, etc., et on pourrait appeler « moment de troisième ordre » la grandeur ayant comme composantes (4/21) ou (3/22). Le même processus de généralisation mathématique nous conduit à envisager aussi le « moment du quatrième ordre » donné par le déterminant :

$$C_{1234} = \begin{vmatrix} x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{vmatrix}, \quad (4/22)$$

(l'accent désigne la dérivée par rapport au temps propre) et mesurant le parallélépipède formé sur les vecteurs quantité de mouvement, rayon vecteur, vitesse *et* accélération.

Tous les moments d'ordre supérieur à quatre sont nuls.

Les p_k , v_k , x_k ($k = 1, 2, 3, 4$) étant des quadrivecteurs, les :

$$C_{rst} = \begin{vmatrix} v_r & v_s & v_t \\ x_r & x_s & x_t \\ p_r & p_s & p_t \end{vmatrix} \quad (5/22)$$

forment un tenseur du troisième rang, antisymétrique par rapport à tous ses indices. Un pareil tenseur n'a que quatre composantes non nulles et celles-ci coïncident avec (3/22). De même, C_{1234} est la seule composante non nulle d'un tenseur complètement antisymétrique du rang 4. Mais, dans l'espace à quatre dimensions, on peut définir des tenseurs « duals » ou « conjugués » de C_{rst} et C_{1234} , qui sont respectivement d'ordre 1 et 0, c'est-à-dire un vecteur et un scalaire :

laire ; on peut donc dire que $(3/22)$ forment les quatre composantes d'un vecteur $\mathbf{C}$ et que $(4/22)$ est un invariant ou un pseudo-scalaire.

Quoi qu'il en soit, l'absence de proportionnalité entre la quantité de mouvement et la vitesse nous a conduit à introduire, abstraction faite de toute considération de quanta, le tenseur antisymétrique C_{rst} pour décrire le nouvel état de choses. On voit que s'il y a proportionnalité, ou si, d'une façon plus générale, il existe une relation linéaire entre p_k , x_k , et x'_k , ce tenseur est identiquement nul. La mécanique classique suppose que $p_k = mx'_k$: c'est la raison pour laquelle ce tenseur n'y apparaît pas.

L'invariant C_{1234} s'annule dans les mêmes conditions, ou encore s'il y a entre quelques-unes des grandeurs p_k , x_k , x' , x'' une relation linéaire quelconque. On peut l'écrire en développant suivant la première ligne

$$C_{1234} = x''_1 C_{234} - x''_2 C_{341} + x''_3 C_{412} - x''_4 C_{123}.$$

D'autre part, en dérivant $(5/22)$ par rapport au temps propre et en tenant compte que les p_k sont des constantes par hypothèse,

$$C'_{rst} = \begin{vmatrix} x''_r & x''_s & x''_t \\ x_r & x_s & x_t \\ p_r & p_s & p_t \end{vmatrix}, \quad (6/22)$$

donc :

$$-C_{1234} = x'_1 C'_{234} - x'_2 C'_{341} + x'_3 C'_{412} - x'_4 C'_{123} \quad (7/22)$$

On déduit également :

$$C_{1234} = x_1 C''_{234} - x_2 C''_{341} + x_3 C''_{412} - x_4 C''_{123}. \quad (8/22)$$

Il n'est pas possible de préciser davantage la loi de variation des C_{rst} ou de C_{1234} , puisque nous ne connaissons pas la

loi de mouvement en mécanique classique; par contre, nous pourrions le faire quand nous passerons au cas de la mécanique quantique.

Revenons à l'expression générale (4/21). Pour le cas d'un point matériel *au repos*, $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, le pseudo-vecteur C_{rst} a une composante de temps nulle et des composantes d'espace proportionnelles à celles du moment cinétique. Nous sommes donc en présence d'un vecteur *d'espace*. Au repos, sa direction coïncide avec celle du moment cinétique. Lorsqu'on met le point matériel en mouvement, ces deux directions se séparent nécessairement, le moment cinétique se transformant comme un vecteur à six composantes, tandis que le moment du troisième ordre se transforme comme un vecteur. *Il n'est donc pas possible de mettre en évidence l'existence du vecteur C_{rst} sur un électron au repos; il faut considérer le cas du mouvement.*

Enfin, faisons une dernière remarque. Nous avons vu que pour un mobile du type considéré ici on a (formules (2/21)) :

$$x_2 p_3 - x_3 p_2 + A_1 = \text{constante} = m_{23}. \quad (9/22)$$

$x_2 p_3 - x_3 p_2$, ... étant ce qu'on peut appeler le « moment cinétique d'orbite », A_1 , ... pourra être considéré comme un « moment cinétique propre » ; m_{23} , ... seront des constantes englobant toutes les constantes d'intégration, et représentant une sorte de moment total. Remplaçons dans (4/21) $x_2 p_3 - x_3 p_2$, ... par (9/22). A la décomposition (9/22) du moment total en moment d'orbite et moment propre, correspond une *décomposition du vecteur C_{rst}* :

$$\left. \begin{aligned} C_{123} &= (v_1 m_{23} + v_2 m_{31} + v_3 m_{12}) - (A_1 v_1 + A_2 v_2 + A_3 v_3) \\ C_{234} &= (v_2 m_{34} - v_3 m_{24} + v_4 m_{23}) - (B_3 v_2 - B_2 v_3 + A_1 v_4) \\ C_{341} &= (-v_3 m_{14} - v_4 m_{31} + v_1 m_{34}) + (B_1 v_3 - B_3 v_1 + A_2 v_4) \\ C_{412} &= (v_4 m_{12} + v_1 m_{24} - v_2 m_{14}) - (B_2 v_1 - B_1 v_2 + A_3 v_4) \end{aligned} \right\} (10/22)$$

La première partie, qui correspond au moment *total*, se

présente sous la forme d'une **combinaison linéaire** des v_k , à coefficients constants; la seconde, qui **correspond au** moment propre, a la même forme, mais les coefficients sont essentiellement variables.

23. Application à la mécanique quantique. — Passons maintenant au cas de la mécanique quantique.

Nous sommes en possession d'une image classique qui semble se rapprocher plus de l'électron relativiste, que ne le fait l'image d'un point matériel ordinaire. Cherchons les opérateurs qui correspondent aux diverses grandeurs physiques attachées à l'image considérée.

Depuis Breit, on considère que cx_1, cx_2, cx_3 sont les composantes de la vitesse tridimensionnelle, à cause des relations $\dot{x}_r = cx_r$ ($r = 1, 2, 3$). Il s'agit là d'une interprétation dont le sens est bien déterminé. *Dans ce même sens*, demandons-nous quel sera l'opérateur représentant la *vitesse d'univers* de l'électron? Il suffira au lieu de dériver x_k , comme dans la formule précédente, par rapport au temps, de prendre la dérivée par rapport au temps *propre*, ou par rapport à u , qui n'en diffère que par une constante multiplicative. Nous poserons $v_k = \left[\frac{dx_k}{du} \right]$ et nous aurons les formules que nous avons déjà rencontrées (7/14)

$$v_1 = i\alpha_4\alpha_1, \quad v_2 = ix_4\alpha_2, \quad v_3 = ix_4\alpha_3, \quad v_4 = -\alpha_4. \quad (1/23)$$

Les intégrales premières bien connues (2/14) :

$$x_2p_3 - x_3p_2 + \frac{x}{2} \alpha_2\alpha_3 = \text{constante} = \text{const. d'univers} \quad (2/23)$$

montrent qu'il existe un spin, dont l'opérateur est égal, à un facteur près, à $i\alpha_2\alpha_3$, ... Dans le cas de l'image classique introduite au paragraphe précédent, l'existence d'un spin entraîne le fait que les grandeurs C_{rst} nouvellement introduites ne sont plus identiquement nulles. Quels sont les

opérateurs correspondants ? Pour les trouver il n'y a qu'à supposer que, dans (4/21), les p_k , v_k , x_k représentent des opérateurs ; *il n'y a aucune ambiguïté*, car tous sont commutables entre eux. C_{rst} mesurent en quelque sorte l'écart introduit par le fait que le moment cinétique d'orbite $x_2 p_3 - x_3 p_2$ n'est plus une constante.

Ecrivons donc ces opérateurs C_{rst} (à un même facteur près) et appliquons-leur la même décomposition que dans (10/22), c'est-à-dire séparons ce qui correspond au moment total de ce qui a trait au moment cinétique propre, c'est-à-dire au spin. Pour cela, posons comme jusqu'à présent :

$$x_4 = ict, \quad p_4 = -W/ic, \quad v_k = [dx_k/du],$$

et soient m_{rs} les constantes d'univers définissant le moment cinétique total, par les équations (2/23) et leurs analogues (11/14). On a alors la décomposition suivante :

$$\left. \begin{aligned} C_{123} &= v_1 m_{23} + v_2 m_{31} + v_3 m_{12} + \frac{3}{2} \kappa i \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \\ C_{234} &= v_2 m_{34} - v_3 m_{24} + v_4 m_{23} + \frac{3}{2} \kappa \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \\ C_{341} &= -v_3 m_{14} - v_4 m_{31} + v_1 m_{34} + \frac{3}{2} \kappa \alpha_3 \alpha_4 \alpha_1 \\ C_{412} &= v_4 m_{12} + v_1 m_{24} - v_2 m_{14} + \frac{3}{2} \kappa \alpha_4 \alpha_1 \alpha_2 \end{aligned} \right\} \quad (3/23)$$

Le vecteur $\mathbf{C}$ se décompose en une partie dépendant du moment cinétique total m_{rs} , et une seconde, dépendant du spin, comme dans (10/22). *On voit que cette dernière partie se réduit aux opérateurs ternaires, à un facteur près.* Ces opérateurs apparaissent alors comme la partie du tenseur $\mathbf{C}$ qui correspond au spin : ce sont en quelque sorte, les *moments propres du troisième ordre*, tout comme les opérateurs binaires représentent le moment cinétique *propre* de l'électron, et pour les mêmes raisons.

A l'encontre de ce qui se passe en mécanique classique,

nous connaissons ici la loi du mouvement ; nous pouvons donc en déduire la loi de variation du tenseur $\mathbf{C}$.

Remarquons d'abord qu'on peut isoler la partie du tenseur $\mathbf{C}$ qui ne dépend pas des opérateurs ternaires et la mettre sous la forme remarquable suivante :

$$\left. \begin{aligned} C_{123} &= \frac{\kappa i}{2} \frac{d}{du} [x_1 \alpha_2 \alpha_3 + x_2 \alpha_3 \alpha_1 + x_3 \alpha_1 \alpha_2] + \frac{3}{2} \kappa i \cdot \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \\ C_{234} &= \frac{\kappa i}{2} \frac{d}{du} [x_2 \alpha_3 - x_3 \alpha_2 - x_4 \cdot i \alpha_2 \alpha_3] + \frac{3}{2} \kappa \cdot \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \\ C_{341} &= \frac{\kappa i}{2} \frac{d}{du} [-x_3 \alpha_1 + x_1 \alpha_3 + x_4 \cdot i \alpha_3 \alpha_1] + \frac{3}{2} \kappa \cdot \alpha_3 \alpha_4 \alpha_1 \\ C_{412} &= \frac{\kappa i}{2} \frac{d}{du} [x_1 \alpha_2 - x_2 \alpha_1 - x_4 \cdot i \alpha_1 \alpha_2] + \frac{3}{2} \kappa \cdot \alpha_4 \alpha_1 \alpha_2 \end{aligned} \right\} (4/23)$$

Dérivons la composante C_{234} par rapport au temps propre (et désignons cette dérivée par un accent pour la distinguer de la dérivée ordinaire). On a :

$$C'_{234} = \sum x''_2 (x_3 p_4 - x_4 p_3) + \sum x'_2 (x'_3 p_4 - x'_4 p_3)$$

et en tenant compte de (11/16)

$$C'_{234} = \frac{2}{\kappa} S \cdot C_{234} - 2i(\alpha_2 p_3 - \alpha_3 p_2 + i \alpha_2 \alpha_3 p_4). \quad (5/23)$$

A un facteur près, la parenthèse est l'anticommutateur relativiste de $\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$, d'après le tableau I ; c'est donc une constante d'univers.

On a donc, en général :

$$C'_{rst} - \frac{2S}{\kappa} C_{rst} = \text{constante.}$$

$$C'_{rst} - \frac{2S}{\kappa} C_{rst} = -(\alpha_r \alpha_s \alpha_t \cdot S + S \cdot \alpha_r \alpha_s \alpha_t). \quad (6/23)$$

De plus, d'après le paragraphe 16, ces anticommutateurs

sont de la forme $-\kappa i(\alpha_4 \alpha_k)' \omega$, de sorte qu'on peut écrire :

$$\left. \begin{aligned} C'_{234} &= + i\kappa(\alpha_4 \alpha_1)' \omega + \frac{2S}{\kappa} C_{234} \\ C'_{341} &= - i\kappa(\alpha_4 \alpha_2)' \omega + \frac{2S}{\kappa} C_{341} \\ C'_{412} &= + i\kappa(\alpha_4 \alpha_3)' \omega + \frac{2S}{\kappa} C_{311} \\ C'_{123} &= + \kappa(\alpha_4)' \omega + \frac{2S}{\kappa} C_{123} \end{aligned} \right\} \quad (7/23)$$

Des transformations simples permettent d'intégrer (6/23).

On a :

$$\begin{aligned} C'_{234} &= \kappa(\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)' + \frac{2S}{\kappa} (C_{234} - \kappa \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4) \\ \frac{d}{du} (C_{234} - \kappa \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4) &= \frac{2S}{\kappa} (C_{234} - \kappa \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4), \quad (8/23) \end{aligned}$$

ce qui fait apparaître la combinaison intéressante :

$$A_{rst} = C_{rst} - \kappa \alpha_r \alpha_s \alpha_t.$$

(8/23) signifie :

$$C_{234} - \kappa \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 = \text{constante} \cdot e^{\frac{2S}{\kappa} \cdot u} = A_{234}.$$

Les A_{rst} sont donc des grandeurs purement oscillatoires, comme ω . On en déduit qu'elles anticommulent avec S et que $i\omega A_{rst}$ sont des constantes dans l'espace-temps, ce qui donne :

$$\kappa \alpha_4 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 C_{234} = \text{constante d'univers}.$$

Remarquons que cette égalité nous donne la décomposition de la vitesse $\alpha_4 \alpha_1$, en une partie constante et une autre variable. Enfin d'après un théorème général (§ 16) on aura également :

$$x_k'' \cdot A_{rst} = \text{constante d'univers}.$$

Passons maintenant à C_{1234} , lequel peut se décomposer d'une façon analogue à la précédente, en une partie correspondant au moment cinétique constant et une autre, due au spin. Pour le définir, il faudra partir du déterminant (4 22), mais ici ses éléments ne sont plus tous commutables. Nous pouvons poser par hypothèse, en nous guidant sur la forme de ce déterminant :

$$C_{1234} = x_1'' C_{234} - x_2'' C_{341} + x_3'' C_{412} - x_4'' C_{123}. \quad (9/23)$$

Prenons la dérivée et tenons compte que d'après (11/16)

$$x_k'' = \frac{2S}{\kappa} x'' = -x_k'' \frac{2S}{\kappa}.$$

On a :

$$C'_{1234} = \sum x_1'' C_{234} + \sum x_1'' C'_{234} = \sum x_1'' \left(C'_{234} - \frac{2S}{\kappa} C_{234} \right).$$

La formule (7/23) donne la valeur de la parenthèse :

$$C'_{234} - \frac{2S}{\kappa} C_{234} = \text{const.} = \kappa x_1'' \omega,$$

d'où :

$$C'_{1234} = \kappa \sum (x_1'')^2 \omega = \text{constante} \cdot \omega.$$

Le calcul de la constante se fait immédiatement en utilisant les formules (15/16) ; on a tenu compte du changement de signe dans C_{341} , formules (7/23). Il vient

$$C'_{1234} = \kappa [(x_1'')^2 + (x_2'')^2 + (x_3'')^2 - (x_4'')^2] \omega = -\frac{4S^2}{\kappa^2} \cdot \kappa \omega$$

ou :

$$C'_{1234} = 2iS\omega' \quad \text{puisque} \quad \kappa\omega' = 2iS\omega;$$

finalement :

$$C_{1234} = 2iS\omega + \text{constante} \quad (10/23)$$

C_{1234} ne dépend donc pas explicitement des coordonnées.

Voici donc quelques renseignements sur le nouvel élément analytique auquel on peut rattacher les opérateurs ternaires, par un processus analogue à celui qui relie les opérateurs binaires au moment cinétique. Si l'on veut résumer qualitativement les choses, on peut dire : l'image classique d'un électron de Dirac devrait être caractérisée non seulement par l'existence d'un moment cinétique propre, mais aussi par la manière dont varie l'orientation de ce dernier par rapport à la vitesse, donc par le tenseur C_{rst} . La mécanique quantique donne à la fois le spin et la vitesse, donc aussi C_{rst} ; la mécanique classique ne fait pas intervenir de spin et C_{rst} est identiquement nul.

Toutes ces considérations ont trait à un électron de Dirac libre et dans un état déterminé. Mais la mécanique quantique a introduit aussi la notion d'électron qui se trouve simultanément en deux ou plusieurs états distincts. Examinons rapidement ce cas, qui est très important.

24. Interprétation physique. Cas d'un paquet d'ondes. — La solution générale de l'équation de Dirac pour un électron libre, est composée d'une superposition d'ondes planes du type envisagé aux paragraphes précédents. Une onde plane représente un électron dans un « état » bien défini, caractérisé par une énergie W et une quantité de mouvement p, q, r , bien déterminée. La mécanique ondulatoire introduit cependant une conception nouvelle, celle d'un électron qui est « distribué sur un ou plusieurs états différents », ce qui est une traduction en langage imagé du fait que la fonction d'onde de l'électron en question est formée par une somme de fonctions propres, correspondant à des énergies et des quantités de mouvement différentes, par exemple :

$$\psi_s = a_s e^{(px_1 + qx_2 + rx_3 - Wt)/\hbar} + a'_s e^{(p'x_1 + q'x_2 + r'x_3 - W't)/\hbar} = \Psi_1 + \Psi_2. \quad (1/24)$$

On peut aussi dire que, dans le « système » formé par l'électron (1/24), deux états distincts sont simultanément excités. Si le nombre des ondes planes est suffisamment grand, on peut constituer de cette façon un paquet d'ondes, dont les lois du mouvement sont celles de la mécanique classique, ainsi qu'il est bien connu.

Ce cas du paquet d'ondes est très important pour la question qui nous préoccupe. Il se caractérise par le fait fondamental que *l'invariant Ω_2 n'est plus nul*, comme pour le cas d'une onde plane. Recherchons-en les conséquences. On a d'abord, comme toujours :

$$\sigma_1\pi_1 + \sigma_2\pi_2 + \sigma_3\pi_3 = \Omega_1\Omega_2; \quad (2/24)$$

$\Omega_1\Omega_2$ est un invariant. L'électron possède un moment magnétique, mais (2/24) prouve qu'il n'existe aucun système de référence dans lequel le moment électrique *total* de l'électron soit nul. L'existence d'un moment magnétique entraîne celle d'un moment électrique par le jeu de transformations de Lorentz, mais *cette partie* du moment électrique est nulle dans un système déterminé, à savoir celui dans lequel l'électron est au repos. Il existe donc un moment électrique supplémentaire, propre à l'électron, où plutôt au paquet d'ondes. Mais cette façon de parler est défectueuse, parce qu'on ne peut pas imaginer, dans le cas d'un électron distribué sur deux états quel est le système de « repos ».

Considérons un paquet d'ondes : il a en chaque point un moment magnétique égal à $\sigma_1 dV$, $\sigma_2 dV$, $\sigma_3 dV$, dV étant l'élément de volume. Nous pouvons le regarder comme un aimant de moment σdV , donc ayant une intensité d'aimantation égale à σ . *Tout se passe alors comme s'il existait dans ce paquet d'ondes une distribution de charges magnétiques libres ayant une densité de volume égale à*

$$\mu = - \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_3} \right) = - \operatorname{div} \sigma; \quad (3/24)$$

(il semble permis de supposer en outre que la densité superficielle soit nulle à cause des conditions aux limites usuelles). Or, μ est nul pour une onde plane; tandis que $\mu \neq 0$ pour un paquet d'ondes : cette différence est caractéristique. Calculons en effet ce μ ; l'équation (9/18) donne

$$\mu = -\operatorname{div} \sigma = \frac{i}{c} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial t} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \psi - \tilde{\psi}^* \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \frac{\partial \psi}{\partial t} \right), \quad (4/24)$$

quantité réelle. Nous voyons apparaître ici les quantités du type B déjà rencontrées, § 18. Cette densité μ forme la composante de temps d'un vecteur courant magnétique. En généralisant le raisonnement dont Darwin s'est servi ⁽¹⁾, on voit qu'à un facteur constant près, on peut écrire ce courant sous la forme :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \operatorname{rot} \pi.$$

Or, la formule (6/18) donne, avec $\xi = i\alpha_2\alpha_3$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\psi}^* i \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \psi) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\tilde{\psi}^* i \alpha_4 \alpha_2 \psi) - \\ & - \frac{\partial}{\partial x_2} (\tilde{\psi}^* i \alpha_4 \alpha_3 \psi) + i \left(\frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial x_1} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \psi - \tilde{\psi}^* \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) = 0, \end{aligned}$$

soit :

$$\left[\frac{1}{c} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \operatorname{rot} \pi \right]_1 = i (\tilde{\psi}^* \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial x_1} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \psi). \quad (5/24)$$

Tout se passe donc comme si dans un paquet d'ondes il existait une charge magnétique ayant une densité de volume proportionnelle à :

$$\mu = \frac{i}{c} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial t} \theta \psi - \tilde{\psi}^* \theta \frac{\partial \psi}{\partial t} \right),$$

et un courant :

$$k_r = i \left(\frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial x_r} \theta \psi - \tilde{\psi}^* \theta \frac{\partial \psi}{\partial x_r} \right). \quad (6/24)$$

(1) C. G. DARWIN. *Proc. Roy. Soc.*, A 129, 1928, p. 623.

Ce courant est un quadrivecteur et satisfait à une loi de conservation :

$$\frac{\partial k_1}{\partial x_1} + \frac{\partial k_2}{\partial x_2} + \frac{\partial k_3}{\partial x_3} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0. \quad (7/24)$$

Il suffit de remplacer ξ par θ dans l'équation générale (19/18) dont nous avons déjà démontré la validité. Remarquons encore que cette équation générale donne, pour $\xi = \alpha_4$, une équation de continuité pour un autre quadrivecteur :

$$i \left(\frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial x_r} \alpha_4 \psi - \tilde{\psi}^* \alpha_4 \frac{\partial \psi}{\partial x_r} \right),$$

$$\frac{i}{c} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial t} \alpha_4 \psi - \tilde{\psi}^* \alpha_4 \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \quad (r = 1, 2, 3). \quad (8/24)$$

Ce courant est le courant électrique de conduction. En effet, la formule (7/18) donne, pour $\xi = \alpha_1$, une composante du courant total, ou plutôt une quantité proportionnelle à celle-ci. On a :

$$\frac{2m_0 c}{\kappa} \cdot \tilde{\psi}^* \alpha_1 \psi = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\psi}^* \alpha_4 \alpha_1 \psi)$$

$$- \left(\frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial x_1} \alpha_4 \psi - \tilde{\psi}^* \alpha_4 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\tilde{\psi}^* \alpha_4 \alpha_2 \alpha_1 \psi) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\tilde{\psi}^* \alpha_4 \alpha_3 \alpha_1 \psi),$$

ou :

$$\frac{2m_0 c i}{\kappa} \cdot \tilde{\psi}^* \alpha_1 \psi = \left[\frac{1}{c} \frac{\partial \pi}{\partial t} + \text{rot } \sigma \right]_1 - i \left(\frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial x_1} \alpha_4 \psi - \tilde{\psi}^* \alpha_4 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right),$$

et d'après le raisonnement de Darwin, la première parenthèse représente la contribution de la polarisation. Le reste doit être le courant de conduction : c'est le courant de Schrödinger. La même formule (7/18), pour $\xi = 1$, sépare la densité de charge électrique $-\text{div } \pi$, due à la polarisation π , de la densité de charge électrique vraie, proportionnelle à :

$$\frac{i}{c} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial t} \alpha_4 \psi - \tilde{\psi}^* \alpha_4 \frac{\partial \psi}{\partial t} \right).$$

L'intégrale de celle-ci est naturellement égale à $-\frac{4\pi m_0 c}{h}$; les deux densités ne diffèrent que par une divergence. Cette décomposition est utile pour mettre en évidence le parallélisme entre constituants électriques et magnétiques de l'électron. On en déduit également que l'intégrale de l'expression précédente donne le rapport de la charge au magnéton de Bohr.

Il n'y a pas d'autres opérateurs ξ pour lesquels (19/18) représente une véritable équation de continuité; en effet, ξ doit être un invariant pour que les diverses densités qui y figurent soient les composantes d'un quadrivecteur. Mais cette équation reste valable aussi pour les autres grandeurs; nous n'insisterons pas.

Quoi qu'il en soit, il y a une différence fondamentale entre un électron libre dans un état déterminé (onde plane) c'est-à-dire un électron classique, et un électron « distribué sur plusieurs états » (paquet d'ondes), c'est-à-dire l'électron général de la mécanique ondulatoire. Le premier est un *aimant solénoïdal*, c'est-à-dire ne présente pas de densité de magnétisme libre; le second est, *en général*, comparable à un aimant non solénoïdal et on peut parler d'une densité de magnétisme libre qui ne s'annule qu'en moyenne. Remarquons que *c'est l'existence simultanée de deux ou plusieurs états différents de l'électron qui provoque l'apparition de cette densité de magnétisme.*

Soient Ψ_1 et Ψ_2 deux ondes planes quelconques. Si l'électron se trouve dans l'état 1 ou dans l'état 2, la densité de magnétisme est nulle; mais si l'électron est décrit par $\Psi_1 + \Psi_2$ cette densité a une valeur finie: la contribution non nulle provient des termes rectangles, c'est-à-dire *des densités de probabilité relatives aux transitions entre les états qui existent simultanément.*

En effet, W_1 et W_2 étant les énergies des deux états 1 et 2, on a, à un facteur près :

$$\mu = \left(\frac{W_1 + W_2}{2} \right) (\bar{\Psi}_2^* \theta \Psi_1 + \bar{\Psi}_1^* \theta \Psi_2). \quad (9'24)$$

S'il n'y a qu'un seul état, $\Psi_1 = \Psi_2$, $\Omega_2 = \bar{\Psi}^* \theta \Psi \equiv 0$, $\mu = 0$. Mais si $W_1 \neq W_2$, μ n'est plus nul, parce que les probabilités de la forme $\Psi_r^* \theta \Psi_s$, ne le sont pas, lorsque $r \neq s$.

La formule précédente montre cependant qu'il y a encore un cas où même un paquet d'ondes se comporte comme un aimant solénoïdal, c'est-à-dire un cas où il n'existe pas de magnétisme libre. C'est le cas où :

$$W_1 + W_2 = 0,$$

le cas où l'électron se trouve distribué sur deux états seulement, ayant, l'un l'énergie W et l'autre une énergie *négative*, égale à la précédente en valeur absolue. La considération de ces masses magnétiques fictives ne serait peut être pas sans intérêt pour l'étude de la question des énergies négatives.

25. « Tenseurs » et « densités » de Schrödinger. — Nous n'avons pas examiné jusqu'à présent les questions relatives à la « transformation » que subissent les opérateurs lorsqu'on change le système de référence ; ces questions conduisent à des considérations intéressantes qui se rattachent aux développements du premier chapitre et dont nous allons donner un aperçu. Le résultat final n'est pas lié au cas particulier que nous avons envisagé dans ce qui précède, c'est-à-dire au cas d'un électron en relativité restreinte et dans un champ nul ; aussi prendrons-nous directement le cas général d'un électron dans une variété riemannienne quelconque.

Le problème de l'équation de Dirac en relativité générale a été abordé par un certain nombre d'auteurs WEYL, TETRODE, WIGNER, FOCK, PODOLSKY, ZAYCOFF d'une part, W. PAULI et J. SOLMON, F. SCHOUTEN, v. DANTZIG de l'autre. SCHRÖDIN-

GER l'a repris récemment et a systématisé les travaux du premier groupe d'auteurs ci-dessus, dans un mémoire des *Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften*, Berlin (nov. 1932). Donnons-en un bref résumé des parties qui nous intéressent.

Schrödinger écrit l'équation générale de Dirac sous la forme invariante :

$$\gamma^k \nabla_k \psi = \mu \psi, \quad (1/25)$$

où :

$$\mu = \frac{2\pi m_0 c}{h} \quad \text{et} \quad \nabla_k = \frac{\partial}{\partial x_k} - \Gamma_k \quad (k=0, 1, 2, 3; x_0=ict),$$

(on adopte la convention de sommation usuelle).

Les Γ_k sont des opérateurs dont les traces donnent le potentiel d'univers. Les γ^k sont des matrices à quatre lignes et quatre colonnes, dont les éléments sont des fonctions des coordonnées et qui satisfont aux conditions :

$$\gamma^i \gamma^k + \gamma^k \gamma^i = 2g^{ik},$$

les g^{ik} étant les composantes du tenseur métrique fondamental ordinaire. Ce dernier permet de définir des γ_i « covariants », par les formules :

$$\gamma_i = g_{ik} \gamma^k, \quad (3/25)$$

et l'on a aussi :

$$\gamma_i \gamma_k + \gamma_k \gamma_i = 2g_{ik}. \quad (2/25)$$

Si un système de quatre matrices γ_i satisfait à cette dernière condition, il est clair que $S^{-1} \gamma_i S$, y satisfera encore, S étant une matrice quelconque possédant une inverse.

Considérons alors une transformation ponctuelle des coordonnées. Nous devons admettre que les γ_i se transforment d'une certaine manière, mais toujours de façon que (2/25), avec la nouvelle valeur de g_{ik} , soit satisfaite. Or, si cette

condition est satisfaite par γ'_i , elle le sera encore par $S^{-1}\gamma'_i S$, quelle que soit S . Une simple transformation ponctuelle des coordonnées ne suffit pas pour fixer d'une façon univoque les γ'_i finaux (Cela n'a rien d'étonnant; qualitativement, on pourrait dire que la raison réside dans le fait que ces transformations ignorent la variable de spin). Il faut donc compléter les transformations ponctuelles par une condition supplémentaire, qui détermine le choix des γ'_i transformés.

Pour fixer ce choix, Schrödinger, a recours à des conditions d'hermiticité, qui se traduiront, lors du passage aux grandeurs observables, par des *conditions de réalité* du type connu.

Il est facile de voir que tous les γ_i peuvent être rendus hermitiques par des transformations appropriées, mais *différentes* pour chacun, d'eux : une même transformation S ne peut pas rendre hermitiques tous les γ_i simultanément. La condition supplémentaire ne peut donc pas être une condition de « conservation de l'hermiticité » des γ_i . Par contre, on peut voir qu'au moyen d'une même matrice S il est possible de rendre hermitiques simultanément les matrices $\gamma_0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$, et cette circonstance permet de trouver une solution raisonnable du problème posé.

Par hypothèse, Schrödinger admet donc que, pour une métrique définie au moyen des γ_i , les seules transformations qu'on doive envisager sont les transformations ponctuelles de la relativité générale, *complétées* chaque fois par une transformation S , qui conserve les caractères d'hermiticité (ou d'anti-hermiticité) de $\gamma_0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$. On peut donner l'expression de la substitution infinitésimale $S = 1 + \Theta$, attachée à une transformation ponctuelle infinitésimale déterminée et satisfaisant à la condition précédente.

Le caractère des transformations générales est ainsi précisé; de ce fait, il s'introduit une définition plus restrictive d'un « tenseur », qui est la suivante : « un ensemble T

d'opérateurs constitue un « tenseur de Schrödinger », si pour une transformation infinitésimale ponctuelle *complète* il se transforme en $T' + T\Theta - \Theta T$, où T' représente les composantes transformées comme s'il s'agissait d'un tenseur ordinaire du même rang, et où Θ est la substitution définie précédemment par $S = 1 + \Theta$.

On constate que les γ_i constituent un « vecteur de Schrödinger », ainsi que les ∇_k ; on constate également que le *produit* de deux tenseurs A et B est encore un « tenseur », pourvu que A ne contienne pas d'opérateur de la forme $\partial/\partial x_r$.

L'opérateur $\gamma^k \nabla_k$, appliqué à ψ dans l'équation fondamentale (1/25) est un invariant. Pour que cette équation soit invariante pour une transformation complète, il faut que ψ ne change pas pour une transformation ponctuelle ordinaire, mais qu'elle se transforme, lors d'une substitution S, d'après la loi

$$\psi' = S^{-1}\psi.$$

Cela étant, Schrödinger établit deux théorèmes très importants pour la question qui nous intéresse ici. Premier théorème :

- * I. — Soient $T_{\alpha\beta}^{\rho\sigma}$ les composantes d'un « tenseur de Schrödinger » (ne contenant pas l'opérateur $\partial/\partial x_r$) et admettons que, pour un système de référence donné, les *opérateurs*

$$\gamma_0 T_{\alpha\beta}^{\rho\sigma}$$

soient hermitiques si la suite des indices renferme un nombre pair de zéros, et anti-hermitiques dans le cas contraire. Cela étant, on peut montrer *que le passage à un autre système de référence, au moyen d'une transformation complète, conserve le caractère d'hermiticité des opérateurs*

$\gamma_0 T_{\alpha\beta\ldots}^{\rho\sigma\ldots}$, mais qu'on ne peut rien dire au sujet de l'hermiticité des composantes tensorielles $T_{\alpha\beta\ldots}^{\rho\sigma\ldots}$ elles-mêmes.

Second théorème :

II. — A partir du tenseur de Schrödinger $T_{\alpha\beta\ldots}^{\rho\sigma\ldots}$ et des opérateurs $\gamma_0 T_{\alpha\beta\ldots}^{\rho\sigma\ldots}$, on peut former les « densités de moyenne »

$$\tilde{\psi}^* T_{\alpha\beta\ldots}^{\rho\sigma\ldots} \psi \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}^* \gamma_0 T_{\alpha\beta\ldots}^{\rho\sigma\ldots} \psi,$$

qui sont des nombres ordinaires, réels ou purement imaginaires, suivant que les opérateurs sont hermitiques ou anti-hermitiques.

D'après le théorème précédent, *il résulte que ce n'est pas $\tilde{\psi}^* T \psi$ mais bien $\tilde{\psi}^* \gamma_0 T \psi$ qui conserveront, dans tous les systèmes de référence, les caractères de réalité que nous leur avons supposés*, et qui sont ceux d'un tenseur ayant une signification physique. D'autre part, à cause des propriétés de ψ , $\tilde{\psi}^* T \psi$ ne se transformera pas comme le tenseur T . Schrödinger démontre que ce sont précisément les composantes :

$$\tilde{\psi}^* \gamma_0 T \psi$$

qui se transforment comme les composantes du tenseur correspondant.

A chaque tenseur de Schrödinger $T_{\alpha\beta\ldots}^{\rho\sigma\ldots}$ on peut donc faire « correspondre » un ensemble de composantes $\tilde{\psi}^* \gamma_0 T_{\alpha\beta\ldots}^{\rho\sigma\ldots} \psi$, lesquelles :

1° se transforment comme un tenseur ordinaire de rang $\rho\sigma\ldots$ à l'encontre de $\tilde{\psi}^* T_{\alpha\beta\ldots}^{\rho\sigma\ldots} \psi$;

2° conservent pour toute transformation leurs caractères de réalité, en supposant bien entendu que les opérateurs $\gamma_0 T_{\alpha\beta\ldots}^{\rho\sigma\ldots}$ possèdent les caractères d'hermiticité correspondants.

Schrödinger établit donc une correspondance entre un « tenseur de Schrödinger » $T_{\alpha\beta}^{\rho\sigma}$ et le tenseur ordinaire $\psi^* \gamma_0 T_{\alpha\beta}^{\rho\sigma} \psi$, et considère le second comme l'interprétation physique du premier.

Ces résultats précisent et généralisent d'autres résultats analogues, qui ont été indiqués par v. NEUMANN dans le cas de l'équation de Dirac en relativité restreinte ⁽¹⁾ v. Neumann écrit l'équation de Dirac sous la forme adoptée par Schrödinger (les Γ_k étant cependant des nombres) et établit comme plus haut, une « correspondance » entre les matrices γ_k et les nombres ordinaires $\psi^* \gamma_0 \gamma_k \psi$.

26. Application. — Revenons à la théorie exposée au chapitre premier et examinons si elle fournit les conditions de réalité nécessaires pour les diverses grandeurs physiques qu'on y rencontre.

Remarquons que l'équation de v. Neumann ou de Schrödinger (avec des potentiels nuls) est identique à l'équation fondamentale écrite sous la forme (7/7), au changement de notation suivant près :

$$\gamma_1 = i\alpha_4\alpha_1, \quad \gamma_2 = i\alpha_4\alpha_2, \quad \gamma_3 = i\alpha_4\alpha_3, \quad \gamma_0 = -\alpha_4.$$

Les γ_k forment en général un quadrivecteur. Or, les formules qui donnent la vitesse d'univers (à un facteur près), par simple dérivation des coordonnées :

$$\left[\frac{dx_r}{du} \right] = i\alpha_4\alpha_r, \quad \left[\frac{dx_4}{du} \right] = -\alpha_4 \quad (r = 1, 2, 3)$$

s'écrivent :

$$\left[\frac{dx_k}{du} \right] = \gamma_k \quad (k = 0, 1, 2, 3), \quad \text{ou encore : } \left[\frac{dx_k}{d\tau} \right] = ic\gamma_k,$$

⁽¹⁾ J. v. NEUMANN, *Z. Physik*, 48, 1928, p. 868.

τ étant le « temps propre ». Les « dérivées » forment bien un quadrivecteur, qui peut donc servir à définir la vitesse d'univers. Vérifions que les conditions de réalité sont également satisfaites.

D'après ce qui précède, ce ne sont pas les caractères d'hermiticité du vecteur précédant $ic\gamma_k$ qui doivent nous les donner, mais bien ceux des opérateurs ;

$$ic\gamma_0\gamma_1, \quad ic\gamma_0\gamma_2, \quad ic\gamma_0\gamma_3, \quad ic\gamma_0\gamma_0$$

c'est-à-dire :

$$c\alpha_1, \quad c\alpha_2, \quad c\alpha_3, \quad ic.1.$$

Les densités de moyenne de ces derniers opérateurs constituent la densité de courant, vecteur d'univers, et possèdent effectivement les caractères de réalité nécessaire.

La densité de courant électrique « correspond » donc, d'après Schrödinger au vecteur γ_k (*loc. cit.*, p. 24). En multipliant convenablement les opérateurs γ_k , on peut former des « tenseurs de Schrödinger » ; à chaque tenseur A de ce type correspondra donc une densité de moyenne $\tilde{\Psi}^* \alpha_4 A \Psi$ (puisque $\gamma_0 = -\alpha_4$) qui se transformera comme un tenseur ordinaire du même rang.

La situation est donc la suivante. Soit A un ensemble d'opérateurs (formé par les produits des α_k), formant les composantes d'un tenseur de Schrödinger. On peut lui faire correspondre deux séries de nombres ordinaires :

a) les nombres $\Psi^* \alpha_4 A \Psi$, qui se transforment effectivement comme les composantes d'un tenseur ordinaire du même rang que A, et qui conservent, dans la transformation, les conditions de réalité nécessaire pour l'interprétation physique, et :

b) les densités de moyenne $\Psi^* A \Psi$ qui ne se transforment pas de cette façon. A cause des lois de transformation de α_4 c'est $\int \tilde{\Psi}^* A \Psi. dV$, qui dans ce cas, se transforme comme un tenseur du même rang que A.

D'après Schrödinger, à cause des conditions correctes de réalité et de transformation, ce sont les grandeurs $\psi^* \alpha_4 \psi$ qui doivent servir d'interprétation physique au tenseur A. D'après les principes généraux de la mécanique quantique, l'interprétation physique des opérateurs A (Cf. le tableau II de M. de Broglie) est donnée par la moyenne :

$$\int \bar{\psi}^*(x, y, z, t, \zeta) A \psi(x, y, z, t, \zeta) . dV . d\zeta$$

(ζ étant la variable de spin) et la densité spatiale devrait être dans ce cas :

$$\bar{\psi}^* A \psi.$$

Dans un cas c'est la densité qui se transforme comme l'opérateur, dans l'autre c'est la moyenne elle-même.

Observation finale. — Remarquons que la densité ordinaire étant $\psi^* A \psi$, on peut écrire la densité de Schrödinger sous la forme :

$$\Phi A \psi$$

avec $\Phi = \bar{\psi}^* \alpha_4$. On peut caractériser la différence entre ces deux grandeurs en disant que, dans le premier cas, l'opérateur A est encadré par ψ et son *imaginaire conjugué*, tandis que dans le second cas le même opérateur est encadré par ψ et par son *adjoint*.

En théorie non relativiste, l'adjoint de ψ est identique à son conjugué ψ^* , mais on peut dire qu'il n'en est plus de même en théorie de Dirac. Pour définir cet adjoint il est nécessaire de définir l'expression adjointe de $\partial/\partial t$ ou de $\partial/\partial x_4$. Dans une théorie relativiste correcte, donc parfaitement symétrique, où toutes les variables x_k doivent jouer le même rôle, il est naturel d'admettre que les règles pour trouver l'expression adjointe de $\partial/\partial x_k$ soient les mêmes, quel que soit k . Donc, $\propto \frac{\partial}{\partial x_k}$ devra être considérée comme une expres-

sion self-adjointe, même lorsqu'elle se réduit pour $k = 4$, à $-\frac{\hbar}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t}$. Cela étant, soit :

$$\kappa \frac{\partial \psi}{\partial t} + H\psi = 0 \quad (1/26)$$

l'équation de Dirac. H est l'hamiltonien, comme toujours self-adjoint; ψ est considéré comme une matrice.

L'équation vérifiée par Φ , l'adjoint de ψ , sera :

$$-\kappa \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Phi H = 0, \quad (2/26)$$

tandis que l'équation transposée et conjuguée, vérifiée par $\tilde{\psi}^*$ sera :

$$-\kappa \frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial t} - c\kappa \sum_{r=1}^3 \frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial x_r} \alpha_r + m_0 c^2 \tilde{\psi}^* \alpha_4 = 0$$

ou :

$$-\kappa \frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial t} \alpha_4 + c\kappa \sum_{r=1}^3 \frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial x_r} \alpha_4 \alpha_r + m_0 c^2 \tilde{\psi}^* \alpha_4 \alpha_4 = 0 \quad (3/26)$$

et on voit que si l'on pose :

$$\Phi = \tilde{\psi}^* \alpha_4$$

(3/26) se réduit à (2/26). Cette observation est connue, mais le rapprochement avec les théorèmes de Schrödinger ne manque pas d'intérêt.

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Le Neutron.

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 7 Avril 1933.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

CH. MAURAIN.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

S. CHARLÉTY.

